Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2009

Maria Nilde Fernandes Barreto

Análise Estruturada e Formal das Provas

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2009

Maria Nilde Fernandes Barreto

Análise Estruturada e Formal das Provas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Doutor João Carlos David Vieira, Professor associado e do Doutor Manuel António Gonçalves Martins, Professor auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Aos meus pais

o júri

Presidente

Prof. Doutora **Ana Maria Reis d'Azevedo Breda**
Professora Associada com Agregação da Universidade de Aveiro.

Prof. Doutora **Maria Manuela Sousa Antunes Sobral**
Professora Catedrática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Prof. Doutor **João Carlos David Vieira**
Professor Associado Aposentado da Universidade de Aveiro. **(Co - Orientador)**

Prof. Doutor **Manuel António Gonçalves Martins**
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro. **(Orientador)**

agradecimentos

-Agradeço ao meu orientador Prof. Doutor Manuel Martins e ao meu co-orientador Doutor David Vieira pelo apoio, atenção e grande incentivo à realização desta investigação. Foi um previlégio e um desafio.

-Ao meu orientador Prof. Doutor Manuel Martins, pela paciência e sobretudo pela capacidade de instigação, talento e disponibilidade, demonstrando interesse e boa vontade. Sem a sua rigorosa orientação este estudo não teria sido realizado.

-Ao meu co-orientador Prof. Doutor David Vieira por todas as sugestões, críticas e comentários.

-Ao Prof. Doutor Hernandez-Manfredini pela leitura e sugestões.

-Agradeço ao Instituto Português de Apoio ao Desenvolvimento, pelo apoio financeiro proporcionado.

-Agradeço carinhosamente aos meus familiares, pelo apoio
Incondicional.

-Aos meus pais, irmãos e sobrinhos, por todo o apoio, incentivo e carinho. Nunca agradecerei o suficiente.

-Agradeço aos meus colegas e amigos pela amizade e pelas palavras de apoio em momentos importantes.

M. N.

palavras-chave

Lógica Proposicional Clássica, Lógica de Primeira Ordem, correção e completude dos cálculos, sistema dedutivo, cálculo de Hilbert, sistema de Dedução Natural e Teoria da Prova.

resumo

Nesta dissertação introduzimos a Teoria da Prova através de sistemas dedutivos como o cálculo de Hilbert para a Lógica Proposicional Clássica e, de uma forma mais pormenorizada, o sistema de Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica e para a Lógica de Primeira Ordem. As regras de inferência do sistema de Dedução Natural reflectem de forma convincente o raciocínio lógico envolvido nas provas matemáticas usuais.

Apresentamos outros cálculos para a Lógica Proposicional Clássica: cálculo de sequentes, cálculo de Smullyan, e ainda, de uma forma resumida, o cálculo Intuicionista.

Por fim, apresentamos uma discussão sobre provas de alguns resultados matemáticos abordadas no ensino secundário, fazendo uma análise comparativa entre as demonstrações standard e as correspondentes demonstrações usando o sistema de Dedução Natural. Este último capítulo pode ser mais um elemento de apoio para os professores de Matemática do ensino secundário, pois permite-lhes uma melhor compreensão de alguns argumentos lógicos envolvidos nas provas de resultados matemáticos.

keywords

Classical Propositional Logic, First Order Logic, soundness and completeness, deductive systems, Hilbert's calculus, Natural Deduction system and Proof Theory.

abstract

In this thesis, we introduce the Proof Theory by using some deductive systems. The systems we considered are the Hilbert Calculus for Classic Propositional Logic and, in more detail, the Natural Deduction system for the Classic Propositional Logic and for the First Order Logic. The inference rules of the Natural Deduction system, convincingly reflects the logical reasoning present in the usual mathematical proofs.

We present other calculus for Classical Propositional Logic: sequents calculus, Smullyan calculus, and also briefly, the Intuitionist calculus.

Finally, we discuss proofs of some mathematical results studied in the high school, by making a comparative analysis between standard proofs and the corresponding ones using the Natural Deduction system. This last study can be a useful resource for high school mathematics teachers, since it allows a better understanding of some logical arguments used in the proofs of some mathematical results.

.

“Qualquer matemático sabe que uma demonstração
não é verdadeiramente ‘compreendida’ enquanto
ele se limitar a apenas verificar, ... sem contudo
conceber de forma muito clara as ideias que
conduziram à construção dessa cadeia
de deduções e não uma outra
qualquer.”

(N. Bourbaki.)

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Historicamente a Lógica Matemática surgiu oficialmente em 1847, com a publicação do livro de George Boole (1815-1864) “The mathematical analysis of logic”e numa versão mais extensa “An investigation of the laws of thought”, em 1854. No início do século XX, com o desenvolvimento dos Métodos Algébricos e da Teoria dos Conjuntos as preocupações com as demonstrações em Matemática passaram a ser mais evidentes. Tanto é que o matemático alemão David Hilbert tentou provar a consistência de axiomatizações da Matemática através de métodos considerados recursivos e computacionais. David Hilbert liderou a escola denominada “Formalismo”, que tinha como fundamento provar a consistência Matemática por métodos lógico-matemáticos. Assim, apareceu a “Teoria da Prova”pela motivação em formalizar provas matemáticas. Podemos dizer que a Teoria da Prova é a área da Matemática que estuda as provas matemáticas, que são fundamentos de toda a Matemática. O primeiro passo que se destacou na Teoria da Prova foi com Frege em 1879, com a formulação da Lógica de Primeira Ordem. Mais tarde estendeu-se à Lógica Intuicionista com a formalização das provas construtivas e à Programação em Lógica para a Inteligência Artificial. Esses aspectos tornaram a Teoria da Prova numa área de importância central, possibilitando através de computadores a geração e manipulação de provas formais.

Na sequência do estudo das provas matemáticas surgiram dois conceitos diferentes da prova matemática. No primeiro conceito considera-se que as provas são convenções sociais com os quais os matemáticos convencem outras pessoas da validade de um determinado teorema. Isto é, a prova é expressa em linguagem natural através de possíveis símbolos e figuras e é suficiente para convencer um “expert”da validade de um teorema. Exemplo deste tipo de prova é a que se encontra presente na argumentação usual. No segundo conceito considera-se que as provas são sequências de símbolos que satisfazem um conjunto de regras definidas por meio das quais provamos o teorema. Estas são chamadas provas “formais”para diferenciar das primeiras que são chamadas provas “sociais”.

A Teoria da Prova está exclusivamente relacionada com o estudo das provas formais. Um dos principais objectivos desta área da Matemática é estudar sistemas Lógicos, e consequentemente, conjuntos de axiomas e ou regras apropriados para formalizar provas matemáticas. Em particular, no contexto da computação, interessa investigar o comprimento de uma prova num sistema formal particular. Outro objectivo da Teoria da Prova é estudar a estrutura formal das provas e que tipo de informação adicional podemos obter das provas além da validade do teorema que está a ser demonstrado. O aparecimento da Teoria da Prova levou ao desenvolvimento da Teoria da Computação e consequentemente ao desenvolvimento da Programação em Lógica pois permitiu estudar a decidibilidade de certos problemas, isto é, saber se existe um procedimento informático finito para determinar se uma dada fórmula é um teorema.
O objectivo do nosso trabalho é apresentar a Lógica Proposicional Clássica e a Lógica de Primeira Ordem através do sistema de Dedução Natural e apresentar elementos de apoio para os professores de matemática do ensino secundário que possam ser úteis na preparação das aulas que incluem demonstrações. Analisamos algumas demonstrações fazendo comparação crítica entre as demonstrações feitas nos livros escolares de matemática e a demonstração no sistema de Dedução Natural com os passos detalhados. Apresentaremos a Lógica Proposicional Clássica, a Lógica de Primeira Ordem e de modo breve a Lógica Intuicionista indicando referências para o leitor mais interessado. Para a Lógica Proposicional Clássica apresentaremos a sintaxe (linguagens e fórmulas), a semântica e vários cálculos: cálculo Axiomático, cálculo de Dedução Natural, cálculo de Gentzen e o cálculo de Smullyan com o objectivo de analisar as consequências sintácticas e semânticas. Para a Lógica de Primeira Ordem faremos apenas a apresentação do sistema de Dedução Natural. Para a Lógica Intuicionista faremos um breve resumo comparando o cálculo Axiomático da Lógica Proposicional Clássica com o da Lógica Proposicional Intuicionista.

A escolha do tema veio do interesse na discussão das demonstrações. É que devido a algumas dificuldades que tive na compreensão de certas demonstrações, achei interessante fazer um estudo sobre os sistemas dedutivos, nomeadamente o cálculo Dedução Natural (por ser considerado o mais próximo do nosso raciocínio) e aplicá-lo na análise às demonstrações no ensino secundário (por ser o nível que leccionei).

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

Capítulo 1 - Introdução. Neste capítulo faremos a apresentação da estrutura do nosso trabalho, com objectivos e motivações.

Capítulo 2 - Preliminares. Apresentaremos alguns conceitos básicos da Lógica Proposicional Clássica, necessários para uma melhor compreensão do presente texto.

Capítulo 3 - Sistemas Dedutivos. Estudaremos neste capítulo: o cálculo Axiomático da Lógica Proposicional Clássica, de uma forma mais alargada o cálculo de Dedução Natural para Lógica Proposicional Clássica e para Lógica de Primeira Ordem (apresentando os resultados mais importantes), o cálculo de Gentzen, o cálculo de Smullyan (de uma forma mais resumida) e o cálculo Intuicionista.

Capítulo 4 - Dedução Natural no Ensino Secundário. Apresentaremos neste capítulo, a aplicação do sistema de Dedução Natural em demonstrações do ensino secundário. O objectivo é apresentar alguns elementos de apoio para os professores de matemática do ensino secundário que possam ser úteis na preparação das aulas que incluem demonstrações. Apresentaremos alguns exemplos retirados de manuais escolares fazendo uma análise de comparação crítica entre as demonstrações feitas no livro e as demonstrações feitas no sistema de Dedução Natural.

Capítulo 5 - Conclusão. Neste capítulo apresentaremos a conclusão do nosso estudo, a importância do estudo dos sistemas dedutivos e sobretudo a importância do estudo do sistema de Dedução Natural.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Lógica Proposicional Clássica

O objectivo do presente trabalho é analisar o processo de construção de provas utilizando uma ferramenta adequada que nos ajudará a formalizar o nosso estudo. Para isso, temos de definir o sistema Lógico-Formal que iremos utilizar no estudo da Lógica Proposicional Clássica. Vejamos algumas noções básicas. A Lógica Proposicional Clássica trata das proposições, construindo proposições mais complexas a partir de proposições simples, utilizando como meio de ligação os conectivos ([1] e [7]).

Um sistema lógico tem três componentes, nomeadamente sintaxe, semântica e cálculo. A **sintaxe** trata dos aspectos linguísticos. A sintaxe é a parte que descreve as regras que definem quais as combinações de expressões que, no sistema lógico, resultam em fórmulas bem formadas. A **semântica** atribui significados a símbolos e fórmulas identificando as estruturas que definem a denotação de símbolos e de fórmulas. O aspecto semântico de uma linguagem refere-se à atribuição de significados às expressões dessa linguagem. Um dos aspectos mais importante da semântica é a consequência semântica de uma fórmula a partir de um conjunto de fórmulas. O **cálculo** serve para raciocinar sobre as expressões da linguagem. É possível dar várias semânticas e vários cálculos para uma mesma Lógica. Cada semântica fornece uma consequência semântica. Assim, precisamos de determinar uma linguagem que nos permita expressar simbolicamente e de uma forma rigorosa as proposições, a linguagem formal. Como a linguagem formal constitui o objecto de estudo é normalmente referida como *linguagem objecto*. A linguagem utilizada (neste caso a língua portuguesa) nesse estudo é referida como *metalinguagem*. Para falar correctamente numa linguagem tem de se usar exclusivamente os símbolos da referida linguagem.

Começamos por introduzir a noção de **assinatura** da Lógica Proposicional Clássica. A **assinatura** ou **alfabeto** proposicional é constituída pelos seguintes símbolos:

(i) Símbolo de falsidade $\perp$ (absurdo).

(ii) Um conjunto numerável de variáveis proposicionais da linguagem:

$\mathcal{V}ar = \{p_0, p_1, \ldots\}$.

(iii) Os conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ *e* $\rightarrow$.

(iv) Símbolos auxiliares: (,).

Uma proposição numa linguagem proposicional é uma afirmação à qual podemos atribuir um valor de verdade (verdadeiro ou falso), mas não ambos. As proposições na sua forma mais simples serão representadas pelas variáveis proposicionais $p_0, \ldots, p_n, \ldots$.

Por meio de conectivos lógicos podemos construir a partir de proposições simples outras mais complexas. Para isto temos que determinar certas regras. Isto é, saber quando é que uma sequência finita de símbolos é sintacticamente correcta. Às sequências sintacticamente correctas chamamos "fórmulas".

Às variáveis proposicionais, conectivos e símbolos auxiliares chamamos **símbolos primitivos** da linguagem proposicional.

Definição 2.1.1. *O conjunto das fórmulas na assinatura proposicional é o menor conjunto de símbolos X tal que:*

(i) $\perp \in X$.

(ii) Toda variável proposicional $p \in X$.

(iii) Se $\varphi,\ \psi \in X$ *então* $(\neg\varphi) \in X$, $(\varphi \wedge \psi) \in X$, $(\varphi \vee \psi) \in X$ *e* $(\varphi \rightarrow \psi) \in X$.

Dizemos que uma fórmula é uma **fórmula atómica** se não tiver nenhum conectivo lógico. Denotamos o conjunto das fórmulas da assinatura proposicional por **Prop**.

O conectivo $\leftrightarrow$ é definido através de $\wedge$ e $\rightarrow$. Sejam φ $e \xi$ fórmulas da assinatura proposicional; então o conectivo $\leftrightarrow$ está definido da seguinte forma:

• $\leftrightarrow$: $\varphi \leftrightarrow \xi = ((\varphi \rightarrow \xi) \wedge (\xi \rightarrow \varphi))$. A relação de equivalência representa intuitivamente uma relação de causa e efeito mútua na gramática portuguesa.

A fim de simplificar a escrita consideramos as simplificações habituais no que diz respeito à omissão de parêntesis. Isto é, os parêntesis externos são naturalmente omitidos. Os outros parêntesis serão omitidos considerando a ordem de precedência dos conectivos respectivamente, como se seguem $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ *e* $\leftrightarrow$. Assim, por exemplo a fórmula $\varphi \vee \xi \rightarrow \psi$ abrevia a fórmula $((\varphi \vee \xi) \rightarrow \psi)$.

Definimos a seguir, de forma recursiva, o conjunto de variáveis de uma fórmula φ, $\mathcal{V}ar(\varphi)$:

Definição 2.1.2. *(Variáveis de uma fórmula φ) $\mathcal{V}ar(\varphi)$, é o conjunto de todas as variáveis que ocorrem em φ definido recursivamente como se segue:*

i) $\mathcal{V}ar(\perp) = \emptyset$.

ii) Se $\varphi \in \mathcal{V}ar$ então $\mathcal{V}ar(\varphi) = \{\varphi\}$.

iii) Se $\varphi = \neg\psi$ então $\mathcal{V}ar(\varphi) = \mathcal{V}ar(\psi)$.

iv) Se $\varphi = \psi \wedge \xi$ ou $\varphi = \psi \vee \xi$ ou $\varphi = \psi \rightarrow \xi$ então $\mathcal{V}ar(\varphi) = \mathcal{V}ar(\psi) \cup \mathcal{V}ar(\xi)$.

Até aqui estivemos a ver os aspectos sintácticos da linguagem proposicional. Vejamos a seguir alguns aspectos semânticos. A semântica é o ramo da lógica que interpreta e dá significado às proposições verificando se são verdadeiras ou falsas. Consideramos a semântica baseada numa Álgebra booleana particular com dois valores: 1 que representa verdadeiro e 0 que representa falso. Se uma fórmula assume sempre o valor 1 (verdadeiro), independentemente dos valores de verdade das variáveis proposicionais que a compõem, dizemos que essa fórmula é uma **tautologia**. Por outro lado, uma **contradição** é uma fórmula que assume sempre o valor 0 (falso).
Para atribuirmos um valor de verdade a uma fórmula, definimos as seguintes operações: $\hat{\neg} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, $\hat{\wedge} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, $\hat{\vee} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, e $\hat{\rightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ pelas seguintes tabelas:

	$\hat{\neg}$
0	1
1	0

Tabela 2.1: Negação.

$\hat{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 2.2: Conjunção.

$\hat{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabela 2.3: Disjunção.

$\hat{\to}$	0	1
0	1	1
1	0	1

Tabela 2.4: Implicação.

Seja $\{0, 1\}$ o conjunto de valores de verdade. Definimos **valoração** como uma função v que atribui os valores 1 ou 0 às variáveis proposicionais

$$v : \mathcal{V}ar \to \{0, 1\}.$$

Toda a valoração v estende-se de forma natural, ao conjunto de fórmulas da assinatura proposicional. Consequentemente o valor de uma fórmula $\overline{v}(\varphi)$ é calculado a partir dos valores atribuídos por v às variáveis de φ. Formalmente temos:

Uma valoração $v : \mathcal{V}ar \to \{0, 1\}$ estende-se de forma natural a $\overline{v} : \mathbf{Prop} \to \{0, 1\}$ da seguinte forma:

i) $\overline{v}(\perp) = 0$.

ii) $p \in \mathcal{V}ar$, o valor $\overline{v}(p) = v(p)$, é dado.

iii) $\overline{v}(\neg\varphi) = \hat{\neg}\overline{v}(\varphi)$.

iv) $\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = \overline{v}(\varphi)\hat{\wedge}\overline{v}(\psi)$.

v) $\overline{v}(\varphi \vee \psi) = \overline{v}(\varphi)\hat{\vee}\overline{v}(\psi)$.

vi) $\overline{v}(\varphi \to \psi) = \overline{v}(\varphi)\hat{\to}\overline{v}(\psi)$.

Dizemos que uma valoração v **satisfaz** uma fórmula φ se e só se (sse) $\overline{v}(\varphi) = 1$. Uma fórmula φ diz-se uma **tautologia** se para toda valoração v, $\overline{v}(\varphi) = 1$. Se para toda valoração v, $\overline{v}(\varphi) = 0$, φ designa-se uma **contradição**. Se para alguma valoração v, $\overline{v}(\varphi) = 1$ e para outra valoração v', $\overline{v}'(\varphi) = 0$, então φ chama-se uma **contingência**.

Uma valoração v **satisfaz** um conjunto de fórmulas Γ sse v satisfaz todas as fórmulas de Γ. O conjunto de fórmulas Γ diz-se **realizável** se existir uma valoração que o satisfaz; Γ diz-se **contraditório** se para toda valoração v existe uma fórmula $\varphi \in \Gamma$ tal que $v(\varphi) = 0$. Dizemos que uma fórmula φ é **consequência semântica** de um conjunto de fórmulas Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, sse toda valoração v que satisfaça Γ também satisfaz φ. Se φ é consequência semântica do vazio, então φ é uma tautologia e escrevemos $\models \varphi$ no lugar de $\emptyset \models \varphi$.

Notação: Escrevemos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ para denotar $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$, $\varphi \models \psi$ para designar $\{\varphi\} \models \psi$; $\Gamma, \varphi \models \psi$ para representar $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ e ainda $\Gamma, \Delta \models \psi$ para indicar $\Gamma \cup \Delta \models \psi$.

Como vimos, cada valoração estende-se de forma natural ao conjunto de fórmulas. Por isso, não iremos fazer a distinção entre as notações da valoração para as variáveis e da sua extensão às fórmulas. Sempre que não haja perigo de ambiguidade passamos a escrever simplesmente v no lugar de $\overline{v}$; o contexto indicar-nos-á se nos estamos a referir a v ou a $\overline{v}$.

O lema que se segue mostra-nos que o valor de verdade de uma fórmula só depende do valor atribuído às suas variáveis.

Lema 2.1.3. *Sejam $\varphi \in$ **Prop** e $v_1, v_2 : \mathcal{V}ar \to \{0,1\}$. Então temos:*

$$v_1 \restriction_{\mathcal{V}ar(\varphi)} = v_2 \restriction_{\mathcal{V}ar(\varphi)} \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi).$$

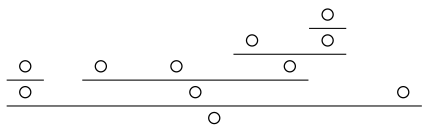
De forma intuitiva e baseado no Lema anterior, definimos a **tabela de verdade** de uma fórmula φ como sendo a representação de todas as possíveis valorações $v \restriction_{\mathcal{V}ar(\varphi)}$ das variáveis que ocorrem na fórmula e o respectivo valor $v(\varphi)$. Se a fórmula tiver n variáveis proposicionais então a tabela de verdade terá 2^n linhas.

Sejam $\varphi = (p_1 \vee p_2) \wedge p_3$ uma fórmula e p_1, p_2, p_3 as variáveis proposicionais que nela ocorrem. A tabela de verdade para a fórmula φ é a seguinte:

	p_1	p_2	p_3	$(p_1 \vee p_2)$	φ
v_1	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0
v_4	0	1	1	1	1
v_5	1	0	0	1	0
v_6	1	0	1	1	1
v_7	1	1	0	1	0
v_8	1	1	1	1	1

Tabela 2.5: Tabela de verdade.

Observação: Para verificar se uma fórmula é uma tautologia, construímos a tabela de verdade para as variáveis que nela ocorrem. Existe outro método para verificar se uma fórmula é uma tautologia, utilizado no cálculo de Gentzen, que torna fala a fórmula em questão. Essa tentativa é representada por uma estrutura constituída por um conjunto de elementos, designados nós e ordenados de um modo particular. Quando se faz uma representação gráfica desses nós seguindo uma certa ordem, obtém-se uma imagem que lembra uma **árvore**:



Dizemos que duas fórmulas φ e ψ são **semanticamente equivalentes** e escrevemos $\varphi \equiv \psi$, se, para toda valoração v, $v(\varphi) = v(\psi)$.

Dado um conjunto de fórmulas na assinatura proposicional é possível obter outras fórmulas semanticamente equivalentes às fórmulas originais, escritas na forma dita normal ([36]). Vejamos:

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathbf{Prop}$. A expressão

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$$

representa a disjunção das fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, sem considerar a ordem e a organização dos parêntesis na construção dessa disjunção. Observe-se que $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ não é uma fórmula. Da mesma forma, escrevemos $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ para representar a conjunção das fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, sem se considerar a ordem e a organização dos parêntesis na construção dessa conjunção.

Por exemplo: $\bigvee_{i=1}^{3} \varphi_i$ representa tanto a disjunção $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$ como a disjunção $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$.

Definição 2.1.4. *A cada variável proposicional e à sua negação chamamos* ***literal****;*

- *À expressão*

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i,$$

com $n \geq 1$ e onde cada ξ_i é um literal chamamos ***cláusula****;*

- *Dizemos que uma fórmula φ está na* ***forma normal disjuntiva (FND)*** *se φ é da forma*

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

onde cada φ_i é uma cláusula, $(i = 1, \ldots, n)$ e $n \geq 1$.

Exemplo: Sejam as cláusulas $\varphi_1 = p \wedge \neg p$, $\varphi_2 = p \wedge (p \wedge \neg p)$ *e* $\varphi_3 = p \wedge \neg p$. A fórmula $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$ está na forma normal disjuntiva.

O seguinte resultado, que não demonstramos, diz-nos que toda a fórmula φ tem uma FND equivalente:

Teorema 2.1.5. *Seja φ uma fórmula. Existe uma FND ψ tal que $\varphi \equiv \psi$.*

O leitor interessado pode encontrar a demonstração deste teorema em [15].

Capítulo 3

Sistemas Dedutivos

Um dos primeiros métodos axiomáticos que se conhece é o método exposto na obra de Euclides, "Elementos"([11]). Esse método tem como objectivo produzir teoremas, partindo de conceitos primitivos, postulados e axiomas, utilizando certas regras de inferência. Os métodos axiomáticos também são conhecidos por cálculos de Hilbert por terem a sua origem moderna nos estudos do matemático alemão David Hilbert (1862-1943).

O discípulo de Hilbert, Gerard Gentzen, apresentou um outro método dedutivo conhecido por método dos *tableaux*, baseado na análise das fórmulas. Esse método foi mais tarde desenvolvido pelos matemáticos Beth, Hintikka e Smullyan.

Com o objectivo de apresentar um sistema formal que se aproximasse o mais possível do nosso raciocínio, Gentzen desenvolveu o sistema de Dedução Natural. Neste sistema as regras de inferência são de introdução e de eliminação de conectivos. O matemático Gentzen ainda desenvolveu um outro sistema conhecido por cálculo de Sequentes com o objectivo de demonstrar um importante teorema conhecido por Teorema da eliminação do corte. Este teorema diz que qualquer prova utilizando a regra do corte pode ser transformada numa prova sem a regra do corte ([9]).

3.1 Cálculo Axiomático

Foi o matemático alemão David Hilbert que iniciou os estudos do cálculo axiomático em diferentes áreas da Matemática. Daí o cálculo axiomático ser também conhecido por cálculo de Hilbert. A ideia que está subjacente a esse método é que demonstrações de teoremas devem ser feitas partindo de axiomas e cada passo seguinte deve ser resultado dos anteriores utilizando as regras de inferência do cálculo.

Vejamos alguns conceitos importantes:

Chamamos **axiomas** às verdades consideradas óbvias e por isso não precisam ser demonstradas.

Definição 3.1.1. *Um **sistema axiomático** $\mathcal{S}$ é um terno ordenado*

$$\mathcal{S} = \langle F, A, R \rangle,$$

onde:

*i) F é um conjunto não vazio cujos elementos são designados por **fórmulas**;*

*ii) A é um sub-conjunto de F cujos elementos são designados por **axiomas** de $\mathcal{S}$.*

*iii) R é um conjunto de pares $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ onde $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq F$ e Γ é finito; os elementos de R são as **regras de inferência** de $\mathcal{S}$.*

É usual apresentar uma regra de inferência $\langle \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \varphi \rangle$ na forma

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}.$$

A fórmula φ é designada **conclusão** e as fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são designadas **premissas**.

Vejamos a seguir o conceito de prova de uma fórmula num determinado sistema axiomático $\mathcal{S}$.

Definição 3.1.2. *Seja $\mathcal{S}$ um sistema axiomático. Uma **prova** da fórmula φ em $\mathcal{S}$, a partir de um conjunto de fórmulas Γ, é uma sequência finita de fórmulas*
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n = \varphi$, tais que, para cada $1 \leq i \leq n$:

i) $\varphi_i \in \Gamma$

ou

ii) φ_i é um axioma de $\mathcal{S}$

ou

iii) φ_i é consequência, por meio de uma das regras de inferência de $\mathcal{S}$, de fórmulas precedentes na sequência, isto é, existe uma regra de inferência $\dfrac{\psi_1, \ldots, \psi_m}{\psi}$ de $\mathcal{S}$ tal que $\varphi_i = \psi$ e para todo $1 \leq j \leq m \;\; \psi_j \in \{\varphi_l : l < i\}$.

Se existir uma prova de φ em $\mathcal{S}$ a partir de Γ escrevemos $\Gamma \vdash_S \varphi$, e dizemos que φ é **consequência sintáctica** de Γ em $\mathcal{S}$. Quando $\Gamma = \emptyset$, dizemos que φ é um **teorema** e escrevemos $\vdash_S \varphi$. Nesse caso, a prova de φ chama-se **demonstração** de φ em $\mathcal{S}$.

Um sistema axiomático $\mathcal{S}$ diz-se **não-trivial** quando há pelo menos uma fórmula da sua linguagem que não é um teorema, e diz-se **trivial** caso contrário.

3.1.1 Lógica Proposicional Clássica

Vamos apresentar a Lógica Proposicional Clássica (LPC), com a linguagem usual, como um cálculo Axiomático. Adoptaremos a abordagem feita em [53]. Apresentaremos três esquemas de axiomas e uma regra de inferência que definem a LPC. A semântica utilizada é a da "tabela de verdade".

Definição 3.1.3. *O cálculo de Hilbert para a LPC é o sistema axiomático* $H = \langle \boldsymbol{Prop}, Axiom(H), MP\rangle$ *com três esquemas de axiomas e uma regra de inferência esquemática, onde* $\boldsymbol{Prop}$ *é o conjunto das fórmulas da assinatura proposicional,* $Axiom(H)$ *consiste nos seguintes esquemas de axiomas*

Axioma 1(A_1): $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, $\varphi, \psi \in \boldsymbol{Prop}$
Axioma 2(A_2): $(\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi))$, $\varphi, \xi, \psi \in \boldsymbol{Prop}$
Axioma 3(A_3): $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$, $\varphi, \psi \in \boldsymbol{Prop}$

e MP *é constituído apenas pela regra de inferência* modus ponens *esquematicamente representada por* $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$, *isto é, das duas fórmulas* φ *e* $\varphi \to \psi$ *derivamos a fórmula* ψ.

Facilmente se pode verificar através de uma tabela de verdade que os axiomas A_1, A_2 e A_3 são tautologias.

Sob a forma do seguinte Lema provemos pelo cálculo de Hilbert que $\varphi \to \varphi$ é um teorema:

Lema 3.1.4 ([53])**.** *Seja* $\varphi \in \boldsymbol{Prop}$. *Então* $\varphi \to \varphi$ *é um teorema no cálculo de Hilbert. Isto é,* $\vdash_H \varphi \to \varphi$.

Demonstração. Utilizando apenas os axiomas do cálculo de Hilbert e a regra Modus Ponens temos a seguinte prova:

1:	$\vdash_H (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	A_2
2:	$\vdash_H \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	A_1
3:	$\vdash_H (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	MP(2,1)
4:	$\vdash_H \varphi \to (\varphi \to \varphi)$	A_1
5:	$\vdash_H \varphi \to \varphi$	MP(4,3)

□

Com o objectivo de ilustrar o conceito de prova vejamos algumas propriedades do cálculo H ([53]):

I) Sejam ξ, φ e $\psi \in \mathbf{Prop}(\mathcal{L})$. Então:

1. $(\vdash_H \xi \to \varphi \ e \ \vdash_H \varphi \to \psi) \Rightarrow \vdash_H \xi \to \psi$.

2. $\vdash_H \varphi \Rightarrow \vdash_H \psi \to \varphi$.

(Metateoremas deste tipo são chamados regras derivadas de $\mathcal{S}$ e por exemplo 1. representa-se por

$$\frac{\vdash_H \xi \to \varphi \quad \vdash_H \varphi \to \psi}{\vdash_H \xi \to \psi})$$

Demonstração. 1.

1:	$\vdash_H (\xi \to (\varphi \to \psi)) \to ((\xi \to \varphi) \to (\xi \to \psi))$	A_2
2:	$\vdash_H (\varphi \to \psi) \to (\xi \to (\varphi \to \psi))$	A_1
3:	$\vdash_H \varphi \to \psi$	hipótese
4:	$\vdash_H \xi \to (\varphi \to \psi)$	MP(3,2)
5:	$\vdash_H (\phi \to \varphi) \to (\xi \to \psi)$	MP(4,1)
6:	$\vdash_H \xi \to \varphi$	hipótese
7:	$\vdash_H \xi \to \psi$	MP(6,5)

2.

1:	$\vdash_H \varphi$	hipótese
2:	$\vdash_H \varphi \to (\psi \to \varphi)$	A_1
3:	$\vdash_H \psi \to \varphi$	MP(1,2)

□

II) Seja $\varphi \in \mathbf{Prop}(\mathcal{L})$. Então:

1. $\vdash_H \neg\neg\varphi \to \varphi$

2. $\vdash_H \varphi \to \neg\neg\varphi$

Demonstração. 1.

1:	$\vdash_H \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	A_1
2:	$\vdash_H (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	A_3
3:	$\vdash_H \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	$I, regra1(1,2)$
4:	$\vdash_H (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	A_3
5:	$\vdash_H \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	$I, regra1(3,4)$
6:	$\vdash_H (\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi))$	A_2
7:	$\vdash_H (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	MP(5,6)
8:	$\vdash_H \neg\neg\varphi \to \varphi$	$MP(L\ 3.1.4, 7)$

2.

1:	$\vdash_H \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	$II), regra1$
2:	$\vdash_H (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	A_3
3:	$\vdash_H \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	MP(1,2)

□

O cálculo de Hilbert é *correcto* e *completo* para a Lógica Proposicional Clássica no sentido do Teorema 3.1.5 e do Teorema 3.1.6, respectivamente:

Teorema 3.1.5 (Correcção). *Seja* $\varphi \in$ ***Prop***. *Então,*

$$\vdash_H \varphi \ \Rightarrow \models \varphi$$

Demonstração. Seja φ um teorema. Então existe uma demonstração em H $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tal que $\varphi_n = \varphi$. A prova é feita por indução sobre o comprimento n da prova.
Para $n = 1$, temos que φ_1 é um axioma. Pela tabela de verdade verifica-se que todos os axiomas do cálculo de Hilbert são tautologias. Logo, $\varphi_1 = \varphi$ é uma tautologia.
Para $n > 1$, φ é obtido por modus ponens de φ_k e $\varphi_l = \varphi_k \rightarrow \varphi$, $1 < k, l \leq n$. Seja v uma valoração. Por hipóteses de indução $v(\varphi_k) = 1$ e $v(\varphi_l) = 1$, e pela tabela de verdade da implicação concluímos que $v(\varphi) = 1$. □

Teorema 3.1.6 (Completude). *Seja* $\varphi \in$ ***Prop***. *Então,*

$$\models \varphi \ \Rightarrow \vdash_H \varphi$$

Veremos mais tarde que o cálculo de Hilbert e o cálculo de Dedução Natural são equivalentes. Por isso, a demonstração da completude do cálculo de Hilbert será feita apenas para o cálculo de Dedução Natural.

3.2 Dedução Natural

O sistema de Dedução Natural é uma alternativa aos sistemas de demonstração formal existentes anteriormente criados por Hilbert, Frege e Russell. Apesar das sugestões de Lukasiewicz nos seus seminários em 1926, foi Jáskowski que começou, em 1929, a desenvolver um sistema dedutivo mais natural que actualizou posteriormente em meados dos anos 30. Mas a forma moderna da Dedução Natural foi proposta por G. Gentzen, matemático alemão, numa dissertação entregue à faculdade de ciências Matemáticas da universidade de Göttingen no ano de 1935. Gentzen foi motivado pelo desejo de estabelecer a consistência da teoria dos números e aproximar as deduções lógicas ao raciocínio natural humano (que decorre das hipóteses para a conclusão). Isto é, quando falamos informalmente utilizamos linguagens naturais que aprendemos e vários tipos de argumentos válidos. Por exemplo: Se chover o José vai ao cinema. Está a chover. Portanto José vai ao cinema. A conclusão está implícita nas premissas. Podemos dizer que foi aplicada a regra de inferência de MP (*modus ponens*) ou eliminação da implicação. (Para o leitor interessado na história da Dedução Natural ver [41].)

O método de Dedução Natural baseia-se nas hipóteses em vez de se basear em formulações axiomáticas. Isto é, para provar uma determinada afirmação partimos de uma hipótese e através de regras de inferência chegamos à conclusão que se quer provar. Foi Prawitz quem desenvolveu uma monografia em 1965, baseada no trabalho de Gentzen, apresentando o sistema de Dedução Natural na forma mais conhecida nos dias de hoje, incluindo também aplicações para Lógica Modal e Lógica de Segunda Ordem. No sistema de Dedução Natural podemos derivar uma expressão, mas não podemos mostrar que existe um conjunto de derivações possíveis de uma expressão. Ou seja, apenas nos dá uma das várias derivações existentes para a expressão. O sistema de Dedução Natural permite, por meio de regras de inferência, demonstrar a validade de fórmulas ou argumentos sem a necessidade de considerar os valores de verdade que cada fórmula recebe. O sistema de Dedução Natural apresenta regras que unem árvores (finitas) que são geradas a partir de um conjunto finito de premissas (representam as hipóteses originais) e hipóteses (representam as hipóteses supostas, diferentes das originais) até derivar uma certa conclusão. A raiz da árvore é a conclusão, os ramos são as derivações que geram a conclusão. As folhas da árvore representam premissas ou hipóteses (hipóteses abertas). Esse sistema não tem axiomas, só regras de inferência. Para cada conectivo lógico existem regras de introdução e regras de eliminação. Cada passo, ou seja, cada derivação realizada na árvore deve ser baseada numa das regras do sistema ([41]).

3.2.1 Lógica Proposicional Clássica

Nesta secção apresentaremos o sistema de Dedução Natural para LPC, considerando a Lógica Proposicional Clássica usual com a sua respectiva linguagem, definida nos preliminares. O sistema de dedução natural que estudamos é baseado no sistema apresentado em [15]. Apresentaremos algumas definições básicas e introduziremos as regras de inferência do sistema de Dedução Natural numa tabela, com as respectivas explicações intuitivas.

Sabendo que uma derivação no sistema de Dedução Natural tem usualmente a representação na forma de uma árvore, achamos importante aqui definir o conceito de árvore.

Definição 3.2.1. *Uma **árvore** $\mathcal{T}$, é um par* $(\mathrm{T}, \mathcal{R})$*, constituído por um conjunto finito* T*, cujos elementos são designados por **nós**, e por uma relação de ordem parcial* $\mathcal{R}$ *em* T *(isto é, uma relação binária, reflexiva, transitiva e anti-simétrica) com elemento mínimo tal que, dados* $n_0, n_1, n_2 \in \mathrm{T}$*:*

- *Se* $n_0 \mathcal{R} n_2$ *e* $n_1 \mathcal{R} n_2$ *então* $n_0 \mathcal{R} n_1$ *ou* $n_1 \mathcal{R} n_0$*;*

*O elemento mínimo é designado por **raíz** de* $\mathcal{T}$ *e os elementos* n *que não têm sucessores (isto é, não existe* $m \neq n$ *tal que* $n\mathcal{R}m$*) chamam-se **folhas**. O conjunto de todas as folhas de* $\mathcal{T}$ *denota-se por* $F(\mathcal{T})$*.*

Vejamos a seguinte definição de árvore etiquetada.

Definição 3.2.2. *Uma **árvore etiquetada por fórmulas** é um terno* $M = \langle \mathcal{T}, FH, f \rangle$ *onde*

(i) $\mathcal{T} = (\mathrm{T}, R)$ *é uma árvore;*

(ii) $FH \subseteq F(\mathcal{T})$ *(folhas de hipóteses abertas);*

(iii) $f : \mathrm{T} \longmapsto$ ***Prop****.*

Quando for perceptível no contexto omitiremos o adjectivo etiquetada e diremos simplesmente árvore. No que se segue vamos utilizar algumas simplificações intuitivas na representação de árvores. Primeiro, sempre que não haja perigo de confusão, iremos identificar os nós (vértices) com as suas imagens. As fórmulas que estão associadas às folhas chamam-se **hipóteses**. As hipóteses que estão em FH chamam-se **hipóteses abertas** e as restantes **hipóteses canceladas**.

Escreveremos $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$ para nos referirmos a uma árvore etiquetada em que φ é uma hipótese aberta e ψ é a raíz da árvore ($\mathcal{D}$ serve para representar a restante parte da árvore). Se pretendemos indicar que as folhas etiquetadas por φ não são hipóteses abertas colocamos a fórmula entre parenteses recto, isto é, $\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$. Quando não estamos interessados em fazer referência às folhas representamos uma árvore simplesmente por $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$, onde φ se refere, obviamente, à raíz da árvore.

Se $\begin{array}{c}\varphi_1\\ \mathcal{D}\\ \psi_1\end{array}$ e $\begin{array}{c}\varphi_2\\ \mathcal{D}\\ \psi_2\end{array}$ são árvores então $\dfrac{\begin{array}{cc}\varphi_1 & \varphi_2\\ \mathcal{D} & \mathcal{D}\\ \psi_1 & \psi_2\end{array}}{\xi}$ representa a árvore resultante da junção[1] das duas árvores anteriores acrescentando a nova raíz ξ.

No que se segue iremos utilizar outras simplificações análogas como por exemplo se $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ é uma árvore então $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \dfrac{\varphi}{\psi}\end{array}$ é a árvore obtida acrescentando uma nova raíz ψ.

Cada um dos passos de construções de novas árvores é chamada regra de inferência que definimos a seguir:

Definição 3.2.3. *Sejam $\varphi, \psi, \xi \in$ **Prop**. Uma **regra de inferência** em Dedução Natural é uma expressão da forma*

$$\dfrac{\begin{array}{ccccccc}[\varphi_1] & & [\varphi_i] & & \varphi_{i+1} & & \varphi_n\\ \mathcal{D}_1 & \ldots & \mathcal{D}_i & \ldots & \mathcal{D}_{i+1} & \ldots & \mathcal{D}_n\\ \psi_1 & & \psi_i & & \psi_{i+1} & & \psi_n\end{array}}{\xi}.$$

*As fórmulas ψ_i são as **premissas** e ξ é a **conclusão**.*

Uma regra de inferência deve ser entendida da seguinte forma: Se

$$\begin{array}{ccc}\varphi_1 & & \varphi_n\\ \mathcal{D}_1, & \ldots, & \mathcal{D}_n\\ \psi_1 & & \psi_n\end{array}$$

são árvores, então podemos concluir a árvore

$$\dfrac{\begin{array}{ccccccc}[\varphi_1] & & [\varphi_i] & & \varphi_{i+1} & & \varphi_n\\ \mathcal{D}_1 & \ldots & \mathcal{D}_i & \ldots & \mathcal{D}_{i+1} & \ldots & \mathcal{D}_n\\ \psi_1 & & \psi_i & & \psi_{i+1} & & \psi_n\end{array}}{\xi},$$

[1] Em rigor, devíamos formar uma árvore como a soma das duas e depois etiquetá-la concordando com as duas árvores etiquetadas à partida.

fechando algumas hipóteses abertas, especificadas pela própria regra, nomeadamente $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$.

Fica claro que as hipóteses abertas são introduzidas para aplicação de uma regra, iniciando uma sub-derivação que quando termina fecha as respectivas hipóteses (que marcamos com [ ]). As hipóteses podem ser utilizadas mais do que uma vez, desde que não estejam fechadas. Isto é, depois de estarem fechadas, as hipóteses não podem ser utilizadas, salvo se forem introduzidas como novas hipóteses (abertas).

As regras de inferência do sistema Dedução Natural (DN) que vamos estudar são de dois tipos: de introdução de conectivos e de eliminação de conectivos.

Assim, temos a Tabela e a descrição que se segue:

	Regras de Introdução	Regras de Eliminação
$\wedge$	$\dfrac{\psi \quad \varphi}{\psi \wedge \varphi}$	$\dfrac{\psi \wedge \varphi}{\psi} \quad \dfrac{\psi \wedge \varphi}{\varphi}$
$\vee$	$\dfrac{\psi}{\psi \vee \varphi} \quad \dfrac{\varphi}{\psi \vee \varphi}$	$\dfrac{\psi \vee \varphi \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \mathcal{D}\\ \xi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \xi\end{array}}{\xi}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]\\ \mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\psi \rightarrow \varphi}$	$\dfrac{\psi \quad \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$
$\neg$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\neg\psi}$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\psi]\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\psi}$
$\perp$	$\dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}$	$\dfrac{\perp}{\varphi}$

Tabela 3.3.1: Regras do DN.

A forma de apresentar o sistema de dedução natural não é standard. É usual apresentá-lo em linguagens com menos símbolos para reflectir que a dedução natural é um cálculo construtivista. Aqui acrescentamos as regras referentes à disjunção porque irão ser úteis nas aplicações do capítulo 4.

Sejam ψ, φ *e* ξ três fórmulas quaisquer. Vejamos a descrição da aplicação das regras.

-Regras de conjunção ($\wedge$): Essa regra é bastante intuitiva. Se ψ *e* φ são fórmulas deriváveis então podemos concluir que $\psi \wedge \varphi$ é uma fórmula derivável (introdução da conjunção); se $\psi \wedge \varphi$ é uma fórmula derivável, então podemos concluir que ψ é uma fórmula derivável e φ também é uma fórmula derivável (eliminação da conjunção).

-Regras de disjunção ($\vee$): a regra de introdução de $\vee$ é imediata. Se ψ é uma fórmula derivável então podemos concluir que $\psi \vee \varphi$ (φ é qualquer outra fórmula) é uma fórmula derivável (introdução da disjunção); a regra de eliminação de disjunção captura a conhecida prática matemática de demonstração por casos. Por exemplo suponhamos que num certo argumento, um número natural a é tal que $1 < a < 3$ (φ) ou $5 < a < 7$ (ψ), (portanto $\varphi \vee \psi$). Em ambos casos concluímos que a é par. Portanto, podemos prosseguir o raciocínio, concluindo que a é par.

-Regras de implicação ($\rightarrow$): Se derivamos φ a partir de ψ então podemos concluir $\psi \rightarrow \varphi$ (introdução da implicação) e não precisamos mais da hipótese ψ, ou seja a hipótese é fechada (descartada). Este facto, espelha o teorema da dedução:

$$\Gamma, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

Uma observação importante é que esta regra, juntamente com a regra de eliminação de $\vee$, são diferentes das outras por terem uma característica geral, isto é, a premissa da regra não é simplesmente uma fórmula, mas sim uma derivação.
Se ψ e $\psi \rightarrow \varphi$ são fórmulas deriváveis então podemos concluir que φ (eliminação da implicação) também é uma fórmula derivável. Podemos observar que as regras que fecham as hipóteses podem fechar mais de uma ocorrência da mesma fórmula através de uma única aplicação da regra.

-Regras de negação ($\neg$): Se ψ é uma fórmula derivável e derivamos uma contradição (absurdo: $\perp$) a partir de ψ, então não temos ψ, logo concluímos $\neg\psi$ (introdução da negação); A eliminação da negação é similar. Se $\neg\psi$ é uma fórmula derivável e derivamos uma contradição (absurdo: $\perp$) a partir de $\neg\psi$, então não temos $\neg\psi$, logo concluímos ψ (eliminação da negação).

Observe-se que na regra de *eliminação da negação*, se de $\neg\varphi$ derivamos $\perp$, concluímos φ. Isto não é equivalente à regra de *introdução da negação*, pois desta, a partir de $\neg\varphi$ derivar-se-ia $\neg\neg\varphi$. Tal raciocínio não é aceite no intuicionismo no qual φ e $\neg\neg\varphi$ não são considerados equivalentes. Portanto ao admitirmos a regra de eliminação da negação estamos manifestamente a desenvolver um cálculo não intuicionista.

-E por último, as regras de $\perp$: $\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}$, que consiste no seguinte: Se φ é uma fórmula, de $\neg\varphi$ e φ derivamos $\perp$ (introdução de $\perp$). De $\perp$ derivamos qualquer fórmula φ (eliminação de $\perp$).

Numa derivação no sistema de Dedução Natural as fórmulas iniciais são hipóteses introduzidas para a aplicação de uma regra. Frequentemente temos de fazer uma sub-derivação. Essas sub-derivações são como prova dentro de uma prova, que começam com hipóteses que assumimos como verdadeiras durante a sub-derivação e termina com uma afirmação derivada dessas hipóteses, fechando as respectivas hipóteses abertas, de acordo com a regra aplicada. Durante a sub-derivação podemos utilizar hipóteses anteriores à sub-derivação, desde que não estejam fechadas. Podemos dizer que no sistema de Dedução Natural algumas regras (regras de eliminação) "separam"as fórmulas enquanto outras (regras de introdução) "juntam"as fórmulas. Dessa forma, ao construir derivações, separamos as fórmulas para depois as juntarmos novamente como se fosse um jogo.

A partir da análise da estrutura das derivações no sistema de Dedução Natural, Prawitz observou uma espécie de princípio da inversão que reflecte as simetrias existentes entre as regras de introdução e a correspondente regra de eliminação no sistema Dedução Natural. As regras de eliminação, em certo sentido, são o inverso da correspondente regra de introdução. Se a premissa maior da regra de eliminação foi derivada a partir da regra correspondente de introdução, então nada de novo foi acrescentado à prova. O princípio da inversão, que não vamos enunciar aqui, define essa simetria. Apesar desse princípio já estar contido nos trabalhos de Gentzen quando diz que uma regra de introdução dá a definição da constante lógica e a regra de eliminação é somente uma consequência da correspondente regra de introdução, foi Prawitz quem observou um conjunto de regras de redução que formam o procedimento de normalização conhecido por *teorema de normalização*, utilizado para obter a forma normal das derivações ([36]).

As deduções naturais, a que chamaremos derivações, são recursivamente construídas a partir de fórmulas isoladas por aplicação das regras de inferência.

À representação da derivação através de árvore chamamos **árvore de prova**. Definimos o conjunto de árvores de prova no sistema de Dedução Natural formalmente como se segue:

Definição 3.2.4 ([15]). *O conjunto de árvores de prova ou derivações do sistema de Dedução Natural é o menor conjunto X tal que:*
*1) Para toda fórmula $\varphi \in$ **Prop**, a árvore de um só elemento φ, chamada **singular**, pertence a X;*

2) Se $\begin{array}{cc} \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ \varphi & \psi \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \in X;$

Se $\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \wedge \psi \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi}$, $\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\psi} \in X;$

3) Se $\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \in X;$ *Se* $\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \psi \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \psi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \in X;$

Se $\begin{array}{ccc} & \psi & \varphi \\ \mathcal{D}, & \mathcal{D}', & \mathcal{D}'' \\ \psi \vee \varphi & \xi & \xi \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{ccc} & [\psi] & [\varphi] \\ \mathcal{D} & \mathcal{D}' & \mathcal{D}'' \\ \psi \vee \varphi & \xi & \xi \end{array}}{\xi} \in X;$

4) Se $\begin{array}{c} \varphi \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \in X;$

Se $\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \end{array}$, $\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi \to \psi \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ \varphi & \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \in X;$

5) Se $\begin{array}{c} \psi \\ \mathcal{D} \\ \bot \end{array} \in X,$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c} [\psi] \\ \mathcal{D} \\ \bot \end{array}}{\neg\psi} \in X;$

$$\text{Se} \quad \begin{array}{c} \neg\psi \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array} \in X, \quad \text{então} \quad \dfrac{\begin{array}{c} [\neg\psi] \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\psi} \in X.$$

$$\text{6) Se} \quad \begin{array}{cc} \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ \varphi & \neg\varphi \end{array} \in X, \quad \text{então} \quad \dfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D} & \mathcal{D}' \\ \varphi & \neg\varphi \end{array}}{\perp} \in X.$$

$$\text{Se} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \perp \end{array} \in X, \quad \text{então} \quad \dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\varphi} \in X.$$

A seguir, temos alguns exemplos de árvores de prova.

Exemplo 3.2.5. *Exemplos de árvore de prova para as seguintes fórmulas:*

i) $\varphi \to \varphi$

$$(\to \textit{int } 1)\ \dfrac{[\varphi]^1}{\varphi \to \varphi}$$

ii) $(\varphi \vee \varphi) \to \varphi$

$$(\to \textit{int } 2)\ \dfrac{(\vee \textit{ elim } 2)\ \dfrac{[\varphi]^1 \qquad [\varphi]^1 \qquad [\varphi \vee \varphi]^2}{\varphi}}{\varphi \vee \varphi \to \varphi}$$

Dado que a noção de árvore de prova está definida recursivamente temos um princípio de indução para demonstrar propriedades sobre árvores de prova.

Seja P uma propriedade sobre árvores de prova. Se as árvores de prova singulares têm a propriedade P e P é preservada pelas regras de inferência do cálculo da dedução natural, então todas as árvores de prova têm a propriedade P.

Definição 3.2.6. *Sejam $\Gamma \subseteq$ **Prop** e $\varphi \in$ **Prop**. Dizemos que φ é uma* consequência sintáctica de Γ*, em símbolos $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$, se existe uma árvore de prova X tal que as folhas não canceladas (hipóteses abertas) de X formam um subconjunto de Γ e a raiz de X é φ.*

Sempre que não existe perigo de confusão omitiremos a referência DN. Como é habitual se $\Gamma = \emptyset$ escrevemos simplesmente $\vdash \varphi$ e dizemos que φ é um **teorema**.

A seguir temos exemplos de derivações no sistema de Dedução Natural sob a forma de árvore de derivação. Os números naturais que aparecem nas derivações são marcas usadas ao longo da demonstração para assinalar que uma hipótese foi fechada pela aplicação da regra de inferência em causa.

Exemplo 3.2.7 ([38]). *Exemplos de derivação de teoremas no sistema de Dedução Natural:*

1) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi))$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi \to (\psi \to \xi)]^1$}
\AxiomC{$[\varphi]^2$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\to$ elim)}
\BinaryInfC{$\psi \to \xi$}
\AxiomC{$[\varphi]^2$}
\AxiomC{$[\varphi \to \psi]^3$}
\BinaryInfC{ψ}
\LeftLabel{\scriptsize ($\to$ elim)}
\BinaryInfC{ξ}
\LeftLabel{\scriptsize ($\to$ int 2)}
\UnaryInfC{$\varphi \to \xi$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\to$ int 3)}
\UnaryInfC{$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi)$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\to$ int 1)}
\UnaryInfC{$(\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi))$}
\end{prooftree}
$$

2) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1$}
\AxiomC{$[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1$}
\AxiomC{$[\varphi]^2$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\vee$ int)}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\bot$ int)}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\neg$ int 2)}
\UnaryInfC{$\neg\varphi$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\vee$ int)}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\bot$ int)}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{\scriptsize ($\neg$ elim 1)}
\UnaryInfC{$\varphi \vee \neg\varphi$}
\end{prooftree}
$$

O sistema de Dedução Natural é correcto e completo para a Lógica Proposicional Clássica. Vejamos a seguir o teorema de correcção.

Teorema 3.2.8 (Correcção Forte). *Sejam* $\Gamma \subseteq \textbf{\textit{Prop}}$ *e* $\varphi \in \textbf{\textit{Prop}}$. *Então,*

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

i.e., o sistema de prova de Dedução Natural permite somente a derivação de fórmulas que são consequência semântica das premissas.

Demonstração. Pela definição de $\Gamma \vdash \varphi$ é suficiente demonstrar que para cada árvore de prova $\mathcal{D}$ com conclusão φ e hipóteses abertas em Γ temos $\Gamma \models \varphi$. Para demonstrar esta afirmação vamos usar o princípio de indução enunciado acima.

Para a base de indução, i.e., para as árvores de prova singulares (constituídas por uma só fórmula), temos $\varphi \in \Gamma$ e portanto $\Gamma \models \varphi$.

Vamos agora demonstrar que as regras de inferência transmitem a propriedade de árvores mais simples para árvores mais complexas.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de introdução de conjunção, então é da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}' & \mathcal{D}'' \\ \varphi' & \varphi''\end{matrix}}{\varphi' \wedge \varphi''},$$

onde $\begin{matrix}\mathcal{D}' \\ \varphi'\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'' \\ \varphi''\end{matrix}$ são árvores de prova.

Hipótese de indução: Quaisquer que sejam os conjuntos Γ' e Γ'' contendo as hipóteses abertas de $\begin{matrix}\mathcal{D}' \\ \varphi'\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'' \\ \varphi''\end{matrix}$ respectivamente, temos $\Gamma' \models \varphi'$ e $\Gamma'' \models \varphi''$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}' & \mathcal{D}'' \\ \varphi' & \varphi''\end{matrix}}{\varphi' \wedge \varphi''}$.

Escolhendo Γ' e Γ'' como o conjunto das hipóteses abertas de $\begin{matrix}\mathcal{D}' \\ \varphi'\end{matrix}$ e de $\begin{matrix}\mathcal{D}'' \\ \varphi''\end{matrix}$ respectivamente, temos que $\Gamma \supseteq \Gamma' \cup \Gamma''$. Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$. Então $v(\varphi') = v(\varphi'') = 1$, e portanto $v(\varphi' \wedge \varphi'') = 1$. Consequentemente, $\Gamma \models \varphi' \wedge \varphi''$.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de eliminação de conjunção, então é da forma:

$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}}{\varphi}$, onde $\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}$ é uma árvore de prova.

Hipótese de indução: Para cada conjunto Γ' contendo as hipóteses abertas de $\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}$, temos $\Gamma' \models \varphi \wedge \varphi'$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}}{\varphi}$. Escolhendo Γ' como o conjunto das hipóteses abertas de $\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}$, temos que $\Gamma \supseteq \Gamma'$. Donde, $\Gamma \models \varphi \wedge \varphi'$. Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$. Então $v(\varphi \wedge \varphi') = 1$, e portanto $v(\varphi) = v(\varphi') = 1$. Consequentemente, $\Gamma \models \varphi$.

De forma análoga se pode provar para a forma $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \varphi'\end{matrix}}{\varphi'}$

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de introdução de disjunção, então é da forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}$$, onde $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ é uma árvore de prova.

Hipótese de indução: Para cada conjunto Γ' contendo as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$, temos $\Gamma \models \varphi$.

Seja Γ um conjunto contendo a hipótese aberta de $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}$. Escolhendo Γ' como o conjunto das hipóteses de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$, temos que $\Gamma \supseteq \Gamma'$. Por hipótese de indução $\Gamma' \models \varphi$. Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$. Donde $v(\varphi) = 1$, e portanto $v(\varphi \vee \varphi') = 1$. Consequentemente, $\Gamma \models \varphi \vee \varphi'$.

De forma análoga se pode provar para a forma $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi'\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}$.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de eliminação de disjunção, então é da forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\\ \mathcal{D}\\ \varphi \vee \varphi'\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}'\\ \xi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi']\\ \mathcal{D}''\\ \xi\end{array}}{\xi}$$, onde $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \vee \varphi'\end{array}$, $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}'\\ \xi\end{array}$ e $\begin{array}{c}\varphi'\\ \mathcal{D}''\\ \xi\end{array}$ são árvores de prova.

Hipótese de indução: Para quaisquer conjuntos Γ', Γ'', *e* Γ''' contendo as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \vee \varphi'\end{array}$, $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}'\\ \xi\end{array}$ e $\begin{array}{c}\varphi'\\ \mathcal{D}''\\ \xi\end{array}$ respectivamente, temos $\Gamma' \models \varphi \vee \varphi'$, $\Gamma'' \models \xi$ e $\Gamma''' \models \xi$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{array}{c}\\ \mathcal{D}\\ \varphi \vee \varphi'\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}'\\ \xi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi']\\ \mathcal{D}''\\ \xi\end{array}}{\xi}$. Escolhendo Γ', Γ'' e Γ''' como os conjuntos das hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \vee \varphi'\end{array}$, $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}'\\ \xi\end{array}$ e $\begin{array}{c}\varphi'\\ \mathcal{D}''\\ \xi\end{array}$ respectivamente, temos que $\Gamma \cup \{\varphi, \varphi'\} \supseteq \Gamma' \cup \Gamma'' \cup \Gamma'''$. Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$. Observe-se que $v(\varphi) = 1$ ou $v(\varphi') = 1$, pois se

$v(\varphi) = v(\varphi') = 0$ então $\varphi, \varphi' \notin \Gamma$ e, como $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\varphi, \varphi' \notin \Gamma'$. Mas, $\Gamma' \models \varphi \vee \varphi'$, donde $v(\varphi \vee \varphi') = 1$. Absurdo. Consequentemente, $v(\varphi) = 1$ ou $v(\varphi') = 1$. Como por hipótese $\Gamma'' \models \xi$ e $\Gamma''' \models \xi$ e $\Gamma'', \Gamma''' \subseteq \Gamma \cup \{\varphi, \varphi'\}$. Temos que $v(\xi) = 1$.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de introdução de implicação, então é da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \varphi'\end{matrix}}{\varphi \to \varphi'}$$, onde $\begin{matrix}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \varphi'\end{matrix}$ é uma árvore de prova.

Hipótese de indução: Para qualquer conjunto Γ' contendo as hipóteses abertas de $\begin{matrix}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \varphi'\end{matrix}$, temos $\Gamma' \models \varphi'$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \varphi'\end{matrix}}{\varphi \to \varphi'}$. Escolhendo Γ' como o conjunto das hipóteses abertas de $\begin{matrix}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \varphi'\end{matrix}$, temos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \supseteq \Gamma'$. Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$. Se $v(\varphi) = 1$ então, como $\Gamma' \models \varphi'$, $v(\varphi') = 1$ e portanto $v(\varphi \to \varphi') = 1$. Se $v(\varphi) = 0$ então $v(\varphi \to \varphi') = 1$. Consequentemente, $\Gamma \models \varphi \to \varphi'$.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de eliminação de implicação, então é da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi \to \varphi'\end{matrix}}{\varphi'}$$, onde $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi \to \varphi'\end{matrix}$ são árvores de prova.

Hipótese de indução: Para quaisquer conjuntos Γ' e Γ'' contendo as hipóteses abertas de $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi \to \varphi'\end{matrix}$ respectivamente, temos $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma' \models \varphi \to \varphi'$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi \to \varphi'\end{matrix}}{\varphi'}$. Escolhendo Γ' e Γ'' como os conjuntos das hipóteses de $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi \to \varphi'\end{matrix}$ respectivamente, temos que $\Gamma \supseteq \Gamma' \cup \Gamma''$. Por hipótese de indução, $\Gamma' \models \varphi$ e $\Gamma'' \models \varphi \to \varphi'$. Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$. Então $v(\varphi) = 1 = v(\varphi \to \varphi')$. E portanto $v(\varphi') = 1$. Consequentemente, $\Gamma \models \varphi'$.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de introdução de negação, então é da forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\text{, onde }\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}\text{ é uma árvore de prova.}$$

Hipótese de indução: Para qualquer conjunto Γ' contendo as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}$, temos $\Gamma' \models \bot$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}$. Escolhendo Γ' como o conjunto das hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}$, temos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \supseteq \Gamma'$. Suponhamos que $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Então existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$ e $v(\varphi) = 1$. Donde, $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma'$ o que é absurdo porque por hipótese de indução $\Gamma' \models \bot$.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra de eliminação de negação, então é da forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi}\text{, onde }\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}\text{ é uma árvore de prova.}$$

Hipótese de indução: Para qualquer conjunto Γ' contendo as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}$, temos $\Gamma' \models \bot$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi}$. Escolhendo Γ' como o conjunto das hipóteses abertas de $\begin{matrix}\neg\varphi\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}$, temos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \supseteq \Gamma'$. Suponhamos que $\Gamma \not\models \varphi$. Então existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$. Donde, $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma'$ o que é absurdo porque por hipótese de indução $\Gamma' \models \perp$.

• Se a árvore de prova resulta da aplicação da regra introdução de $\perp$, então é da forma:

$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg\varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi\end{matrix}}{\perp}$, onde $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg\varphi\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi\end{matrix}$ são árvores de prova.

Hipótese de indução: Para quaisquer conjuntos Γ' e Γ'' contendo as hipóteses abertas de $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg\varphi\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi\end{matrix}$ respectivamente, temos $\Gamma \models \neg\varphi$ e $\Gamma' \models \varphi$.

Seja Γ um conjunto contendo as hipóteses abertas de $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg\varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi\end{matrix}}{\perp}$. Escolhendo Γ' e Γ'' como os conjuntos das hipóteses de $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg\varphi\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi\end{matrix}$ respectivamente, temos que $\Gamma \supseteq \Gamma' \cup \Gamma''$. Seja v uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$. Pelas hipóteses de indução $v(\neg\varphi) = v(\varphi) = 1$. Absurdo! Donde não existe tal valoração v. Consequentemente, $\Gamma \models \perp$.

• O caso da regra $\dfrac{\perp}{\varphi}$ é trivial. □

Para demonstrar a completude do sistema de Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica precisamos de algumas definições, lemas e teoremas. Vejamos:

Definição 3.2.9. *Um conjunto de fórmulas Γ diz-se **consistente** se não podemos derivar o absurdo desse mesmo conjunto Γ, isto é, $\Gamma \nvdash \perp$. Dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é **inconsistente** se Γ não é consistente.*

Seja Γ um conjunto de fórmulas. O lema que se segue mostra que: Γ é um conjunto consistente se e só se não podemos derivar de Γ uma fórmula φ e a sua negação $\neg\varphi$.

Lema 3.2.10. *As seguintes três condições são equivalentes:*

i) Γ é consistente;

ii) Para nenhuma fórmula φ se tem que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;

iii) Existe pelo menos uma fórmula φ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$.

Demonstração. Não é difícil verificar que a prova do lema se resume à prova da equivalência entre as seguintes condições:

i') Γ é inconsistente;

ii') Existe pelo menos uma fórmula φ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;

iii') Para qualquer fórmula φ temos $\Gamma \vdash \varphi$.

i')⇒iii') Como Γ é inconsistente então $\Gamma \vdash \perp$. Pela regra de eliminação de $\perp$, $\Gamma \vdash \varphi$ para qualquer fórmula φ.
iii')⇒ii') Trivial.
ii')⇒i') Seja φ uma fórmula tal que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Pela regra $\dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}$ temos $\Gamma \vdash \perp$. Donde Γ é inconsistente. □

Se existe uma valoração v que atribui o valor de verdade 1 a todas as fórmulas de um conjunto de fórmulas Γ então Γ é consistente. Vejamos o seguinte lema que é uma aplicação do Teorema da correcção do sistema de Dedução Natural:

Lema 3.2.11. *Se existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma$, então Γ é consistente.*

Demonstração. (Por contraposição) Suponhamos que Γ é inconsistente, isto é, $\Gamma \vdash \perp$. Pelo Teorema 3.2.8 tem-se $\Gamma \models \perp$. Logo, para qualquer valoração v, se $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma$ então $v(\perp) = 1$. Como $v(\perp) = 0$, qualquer que seja a valoração v, concluímos que não pode existir uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$, para qualquer $\psi \in \Gamma$. □

Lema 3.2.12. *Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Então:*

i) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *é inconsistente* $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$;

ii) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *é inconsistente* $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$.

Demonstração. *i)* Da hipótese temos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$. Pela regra de eliminação da negação concluímos que $\Gamma \vdash \varphi$;
ii) Da hipótese temos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$. Pela regra de introdução da negação concluímos que $\Gamma \vdash \neg\varphi$. □

Definição 3.2.13. *Dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é* ***consistente maximal*** *se:*

i) Γ *é consistente;*

ii) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *e* Γ' *é consistente* $\Rightarrow \Gamma = \Gamma'$.

Lema 3.2.14. *Todo o conjunto de fórmulas consistente* Γ *está contido num conjunto de fórmulas consistente maximal* Γ^*.

Demonstração. Queremos provar que dado um conjunto consistente Γ existe um conjunto consistente maximal que o contem.
Como existe um número numerável de fórmulas, consideremos a lista de todas as fórmulas: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_n, \ldots$. Definimos uma sequência não decrescente de conjuntos Γ_i e mostramos que a união é um conjunto consistente e maximal.

$$\Gamma_0 = \Gamma;$$
$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se} \quad \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \nvdash \perp \\ \Gamma_n & \text{se} \quad \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \perp \end{cases}$$
$$\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n.$$

Começamos por provar que Γ^* é um conjunto consistente e depois provamos que Γ^* é maximal.
Por indução sobre n demonstra-se que cada Γ_n é consistente.
Vejamos que Γ^* é também consistente. Suponhamos que Γ^* não é consistente. Isto é, existe uma derivação de $\perp$ com conjunto (finito) de hipóteses abertas $\{\psi_0, \ldots, \psi_k\} \subseteq \Gamma^*$. Dado que $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$ e a sequência de Γ_i's é não decrescente, temos para cada $i \leq k, \psi_i \in \Gamma_{n_i}$ para algum n_i. Seja $n = max\{n_i,\ i \leq k\}$. Então $\psi_0, \ldots, \psi_k \in \Gamma_n$ e portanto $\Gamma_n \vdash \perp$. Mas como Γ_n é consistente temos uma contradição. Logo, Γ^* é consistente.
Só nos resta provar que Γ^* é maximal. Seja Δ um conjunto de fórmulas consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$. Seja $\psi \in \Delta$. Então $\psi = \varphi_m$ para algum m. Dado que $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ e Δ é consistente, $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$ é consistente. Por conseguinte, $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$, isto é $\varphi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$. O que prova que $\Gamma^* = \Delta$. Logo Γ^* é maximal. □

Se derivamos uma fórmula φ de um conjunto de fórmulas Γ consistente maximal então φ terá de estar em Γ, isto é, qualquer conjunto consistente maximal é fechado para consequência sintáctica ($\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$).

De facto, suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$ e adicionalmente que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é consistente maximal $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente. Logo, $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Donde Γ é inconsistente. O que é uma contradição. Isto é, a hipótese de que $\varphi \notin \Gamma$ considerada anteriormente é falsa. Logo, $\varphi \in \Gamma$.

Lema 3.2.15. *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas consistente maximal, então:*

i) Para qualquer φ tem-se ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$;

ii) Para quaisquer φ, ψ tem-se, $\varphi \to \psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$;

iii) Para quaisquer φ, ψ tem-se, $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma)$;

iv) Para quaisquer φ, ψ tem-se, $\varphi \vee \psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma)$.

Demonstração. i) Sendo Γ consistente, sabemos que φ e $\neg\varphi$ não podem pertencer ambos a Γ. Suponhamos que $\varphi \notin \Gamma$. Então $\Gamma \nvdash \varphi$. Pelo Lema 3.2.12(i) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente. Como Γ é maximal, $\neg\varphi \in \Gamma$.
ii) Suponhamos que $\varphi \to \psi \in \Gamma$ e $\varphi \in \Gamma$. Dado que $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$ e Γ é fechado para consequência sintáctica, temos que $\psi \in \Gamma$ pela regra de eliminação de $\to$. Para provar o recíproco, suponhamos que: $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$. Se $\varphi \in \Gamma$ então obviamente $\Gamma \vdash \psi$, donde $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Se $\varphi \notin \Gamma$ então $\neg\varphi \in \Gamma$. Logo, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ e portanto $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.
As outras condições provam-se de forma similar. □

Vejamos o seguinte resultado que é uma consequência do lema anterior.

Lema 3.2.16. *Se Γ é consistente então existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma$.*

Demonstração. Seja Γ um conjunto consistente de fórmulas. Sabemos pelo Lema 3.2.14 que existe um conjunto consistente maximal Γ^* que contem Γ. Definimos a valoração v da seguinte forma:

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p_i \in \Gamma^* \\ 0 & \text{se} \quad p_i \notin \Gamma^* \end{cases}$$

Vejamos por indução sobre φ que $v(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma^*$. Vamos separar em cinco casos:

Caso i) Se φ for uma fórmula atómica (uma variável), então a condição verifica-se pela definição de v.

Caso ii) Se $\varphi = \neg\psi$ então $v(\varphi) = 1 \Leftrightarrow v(\psi) = 0 \Leftrightarrow \psi \notin \Gamma^* \Leftrightarrow \neg\psi \in \Gamma^*$. (A última equivalência verifica-se pela maximalidade e consistência de Γ^*)

Caso iii) Se $\varphi = \psi \wedge \xi$ então,

$$\begin{aligned} v(\varphi) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (v(\psi) = 1 \text{ } e \text{ } v(\xi) = 1) \\ &\Leftrightarrow \quad \psi \in \Gamma^* \text{ } e \text{ } \xi \in \Gamma^*, \quad \text{por hipótese de indução} \\ &\Leftrightarrow \quad (\psi \wedge \xi) \in \Gamma^*, \quad \text{pelo Lema 3.2.15.} \end{aligned}$$

Caso iv) Se $\varphi = \psi \vee \xi$ então,

$$\begin{aligned} v(\varphi) = 1 &\Leftrightarrow (v(\psi) = 1 \text{ } ou \text{ } v(\xi) = 1) \\ &\Leftrightarrow \psi \in \Gamma^* \text{ } ou \text{ } \xi \in \Gamma^*, \quad \text{por hipótese de indução} \\ &\Leftrightarrow (\psi \vee \xi) \in \Gamma^*, \quad \text{pelo Lema 3.2.15.} \end{aligned}$$

O caso $\varphi = \psi \to \xi$ prova-se de forma análoga à prova dos dois casos anteriores. Finalmente, como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, temos $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma$. □

Corolário 3.2.17. *Seja Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. $\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow$ existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2.12 $\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente. Pelo Lema 3.2.16 existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, ou seja $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$. O Lema 3.2.11 justifica a implicação no outro sentido, isto é, se existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$ para qualquer $\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente. □

Vejamos o Teorema da Completude do sistema de Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica.

Teorema 3.2.18 (Completude forte)**.** *Sejam $\Gamma \subseteq \textbf{Prop}$ e $\varphi \in \textbf{Prop}$. Se φ é uma consequência semântica de Γ então φ é consequência sintáctica de Γ. Isto é,*

$$\Gamma \models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi.$$

Demonstração. A prova é feita pelo método do contra-recíproco, isto é, vamos provar $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$. Suponhamos por hipótese que $\Gamma \nvdash \varphi$ pelo Corolário 3.2.17 temos $\Gamma \not\models \varphi$. □

3.2.2 Lógica De Primeira Ordem

Esta secção é dedicada à Lógica de Primeira Ordem (LPO) seguindo a apresentação oferecida em [15]. Apresentamos os aspectos sintácticos e aspectos semânticos. A linguagem da Lógica Proposicional não é suficiente para representar uma boa parte das afirmações Matemáticas. Por exemplo "existem números pares positivos"e "o quadrado de qualquer número par é positivo". Deste exemplo podemos concluir o seguinte raciocínio: Se "o quadrado de qualquer número par é positivo"e "-2 é um número par"então "o quadrado de -2 é positivo". Na Lógica Proposicional representaríamos por exemplo, "Existem números pares positivos"por p, e "O quadrado de qualquer número par é positivo"por q. Só que essa representação não tem a informação de que p e q envolvem uma propriedade e uma função, para além de quantificadores. Um outro exemplo da limitação da Lógica Proposicional é o seguinte: Todo objecto é igual a si mesmo e 1 é igual a 1. Teríamos de usar uma variável para cada frase, o que não traz informação de que a segunda frase é instância da primeira. Vejamos um exemplo clássico ([53]): "Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Portanto Sócrates é mortal."Como representar essa inferência na Lógica Proposicional Clássica? Por exemplo, representamos por p:"Todos os homens são mortais."; representamos por q: "Sócrates é homem."e representamos por r:"Sócrates é mortal."A fórmula $(p \wedge q) \rightarrow r$ seria a representação da nossa inferência na LPC a qual não é uma tautologia nesta Lógica nem tão pouco revela as dependências entre as afirmações.

Dado um objecto arbitrário de um determinado universo com uma certa propriedade, podíamos estar interessados em saber se essa propriedade é válida para todos os objectos deste universo. Em vez de estudarmos o objecto isoladamente, estamos interessados na classe dos objectos que têm tal propriedade, à qual chamamos **predicado**. Para expressar que todos os elementos têm a dita propriedade utiliza-se um novo símbolo ($\forall$) chamado **quantificador universal** e para expressar que pelo menos um elemento tem a tal propriedade utiliza-se um novo símbolo ($\exists$) chamado **quantificador existencial**.

Sintaxe

Na Lógica de Primeira Ordem (LPO) distinguimos os **termos** e as **fórmulas**. Os termos são expressões destinados a fazer referências a objectos. As fórmulas expressam os factos sobre os objectos. A seguir descreve-se formalmente estes conceitos.

Uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ é constituída por símbolos lógicos e parâmetros. Os símbolos lógicos, comuns a todas as linguagens de primeira ordem, são os seguintes:

-Um conjunto numerável de variáveis $\mathcal{V}ar(\mathcal{L}) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$;

-Os conectivos: $\perp, \neg, \wedge, \vee$ e $\rightarrow$;

-O quantificador universal: $\forall$ e o quantificador existencial: $\exists$;

-Símbolos auxiliares: (,) (parêntese esquerdo, vírgula e parêntese direito);

-Possível símbolo de igualdade: $\approx$;

Os parâmetros são:

-Para cada $n \geq 0$ um conjunto (possivelmente vazio) $\mathcal{F}_n$ de símbolos funcionais de aridade n ou n-ários;

-Para cada $n > 0$ um conjunto (possivelmente vazio) $\mathcal{R}_n$ de símbolos relacionais n-ários, .

A **aridade** de um símbolo é o comprimento dos uplos aos quais pode ser aplicado. Isto é, o número de lugares vazios disponíveis para os argumentos. Aos símbolos funcionais de aridade 0 chamamos **constantes**.

Precisamos de alguns conceitos importantes no cálculo de predicados como o conceito de termo e fórmula.

Definição 3.2.19. *O conjunto dos termos na linguagem $\mathcal{L}$ é o menor conjunto X que verifica as seguintes propriedades:*

(i) $\mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \subseteq X$ e $\mathcal{F}_0 \subseteq X$;

(ii) se $t_1, t_2, \ldots, t_n \in X$ e $f \in \mathcal{F}_n$, com $n \geq 1$, então $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in X$.

Denotamos o conjunto de todos os termos de $\mathcal{L}$ por $\mathcal{T}(\mathcal{L})$.

Para quantificar os objectos temos dois quantificadores clássicos:
$\forall$-Universal (para todos) e $\exists$-Existencial (existe algum).

Definição 3.2.20. *O conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}$ é o menor conjunto X que verifica as seguintes propriedades:*

(i) $\perp \in X$;

(ii) se $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$ e $P \in \mathcal{R}_n, n \geq 1$, então $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in X$;

No caso da linguagem conter o símbolo de igualdade: se $t_1, t_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$ então $t_1 \approx t_2 \in X$.

(iii) se φ, $\psi \in X$ e $x \in \mathcal{V}ar(\mathcal{L})$, então $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ $\in X$.

*Às fórmulas referidas em (i) e (ii) chamamos **fórmulas atómicas**.*

Denotamos o conjunto de todas as fórmulas de $\mathcal{L}$ por $Form(\mathcal{L})$.

$\forall x P(x)$ lê-se: para todo x, $P(x)$ e $\exists x P(x)$ lê-se: para algum x, $P(x)$.

A fim de simplificar a escrita consideremos como na LPC as simplificações habituais no que diz respeito à omissão de parêntesis. Isto é, os parêntesis externos são naturalmente omitidos. Os outros parêntesis serão omitidos considerando a ordem habitual de precedência dos conectivos.

Uma linguagem de primeira ordem pode ter duas variantes: uma com o símbolo de igualdade e outra sem o símbolo de igualdade. As regras do sistema de Dedução Natural para estas duas variantes são diferentes como veremos mais à frente, nomeadamente na presença do símbolo de igualdade temos que incluir mais regras de inferência.

Exemplo 3.2.21. *A linguagem de primeira ordem da teoria de grupos tem igualdade e os símbolos funcionais seguintes:* $f_0 = \{1\}$, $f_1 = \{^{-1}\}$, $f_2 = \{\centerdot\}$ *e* $f_n = \emptyset$ *para* $n > 2$ *e não tem símbolos relacionais.*

Exemplo 3.2.22. *Neste exemplo apresentamos uma linguagem de primeira ordem apropriada para expressar propriedades dos números naturais com ordem. Tem símbolo de igualdade e os seguintes parâmetros:*

$\mathcal{F}_0 = \{c\}$	$\mathcal{R}_1 = \{P\}$
$\mathcal{F}_1 = \{s\}$	$\mathcal{R}_2 = \{Q\}$
$\mathcal{F}_2 = \{f, g\}$	$\mathcal{R}_n = \emptyset, n \geq 3$
$\mathcal{F}_n = \emptyset, n > 2$	

É usual representar as linguagens como o uplo dos parâmetros que a compõem, fazendo referência suplementar à espécie e aridade de cada parâmetro. Assim, esta linguagem pode ser apresentada na forma

$$\mathcal{L} = \langle c, s, f, g, P, Q \rangle.$$

A expressão $s(f(x, y))$ *é um exemplo de um termo desta linguagem e* $\exists x Q(c, x)$ *é um exemplo de uma fórmula nesta linguagem.*

Para uma melhor compreensão dos conceitos e resultados referentes à lógica de primeira ordem, ao longo do texto iremos apresentar exemplos para ilustrar alguns conceitos. Em quase todos eles vamos usar esta linguagem como linguagem de primeira ordem subjacente.

A seguir definimos o conjunto de variáveis que ocorrem num termo.

Definição 3.2.23. *O conjunto* $\mathcal{V}ar(t)$ *de variáveis que ocorrem livres num termo* t *é definido recursivamente como se segue:*

i) se $x \in \mathcal{V}ar(\mathcal{L})$ *então* $\mathcal{V}ar(x) = \{x\}$;

ii) se $c \in \mathcal{F}_0$ *então* $\mathcal{V}ar(c) = \emptyset$;

iii) se $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$ *e* $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ *então* $\mathcal{V}ar(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathcal{V}ar(t_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}ar(t_n)$.

Do conjunto das variáveis que ocorrem numa fórmula, distinguimos as que são livres de seguinte modo:

Definição 3.2.24. *O conjunto $\mathcal{V}arliv(\varphi)$ de variáveis que ocorrem livres numa fórmula φ é definido recursivamente como se segue:*

i) $\mathcal{V}arliv(\perp) = \emptyset$;

ii) $\mathcal{V}arliv(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathcal{V}ar(t_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}ar(t_n)$;

Se a linguagem tiver o símbolo de igualdade então $\mathcal{V}arliv(t_1 \approx t_2) = \mathcal{V}ar(t_1) \cup \mathcal{V}ar(t_2)$;

iii) $\mathcal{V}arliv(\varphi \to \psi) = \mathcal{V}arliv(\varphi \wedge \psi) = \mathcal{V}arliv(\varphi \vee \psi) = \mathcal{V}arliv(\varphi) \cup \mathcal{V}arliv(\psi)$;

iv) $\mathcal{V}arliv(\neg\varphi) = \mathcal{V}arliv(\varphi)$;

v) $\mathcal{V}arliv(\forall x\varphi) = \mathcal{V}arliv(\exists x\varphi) = \mathcal{V}arliv(\varphi)\backslash\{x\}$.

Exemplo 3.2.25. *Consideremos as seguintes fórmulas na linguagem do exemplo 3.2.22.*

$\varphi = (\forall x(Q(x,y) \to s(x)) \wedge \forall y(\neg Q(x,y) \wedge \forall x P(x)))$,

$\psi = \forall x(Q(x,y) \to s(x))$

$\xi = \forall y(\neg Q(x,y) \wedge \forall x P(x))$

$\mathcal{V}arliv(\varphi) = \{x, y\}$;

$\mathcal{V}arliv(\psi) = \{y\}$;

$\mathcal{V}arliv(\xi) = \{x\}$.

Consideremos uma fórmula $\varphi = \forall x\psi$ $(\exists x\varphi)$. Toda a ocorrência de x em φ diz-se uma ocorrência **não livre** ou **ligada** de x pelo quantificador $\forall$ ($\exists$, *respectivamente*). Toda a ocorrência de x em φ que não é ligada diz-se ocorrência livre. Uma fórmula sem ocorrências de variáveis livres chama-se **sentença** ou **fórmula fechada**, isto é, φ é uma sentença se $\mathcal{V}arliv(\varphi) = \emptyset$. Observe-se que uma variável x pode ocorrer simultaneamente livre e ligada numa mesma fórmula φ.

A seguinte definição é muito importante para estabelecer as condições que permitem a substituição de uma variável por um termo numa fórmula: só podemos fazer substituição se o termo é livre para a referida variável na fórmula. Vejamos a definição.

Definição 3.2.26. *Dizemos que* ***um termo*** t ***é livre para*** x ***em*** φ *se:*

i) φ *é uma fórmula atómica;*

ii) $\varphi = \neg\psi$ *e* t *é livre para* x *em* ψ;

iii) $\varphi = \psi \wedge \xi$ *e* t *é livre para* x *em* ψ *e em* ξ;

iv) $\varphi = \psi \vee \xi$ *e* t *é livre para* x *em* ψ *e em* ξ;

v) se $\varphi = \psi \to \xi$ *e* t *é livre para* x *em* ψ *e em* ξ;

vi) se $\varphi = \exists y\psi$ ou $\varphi = \forall y\psi$, y não ocorre livre em t e t é livre para x em ψ, onde $x \neq y$.

Exemplo 3.2.27. *Consideremos a fórmula $\forall x_1(\forall x_2 Q(x_2, x_3) \to Q(x_1, c))$ na linguagem do Exemplo 3.2.22. A única variável que ocorre livre nessa fórmula é a variável x_3. Na fórmula*
$\forall x_1 \exists x_3 Q(x_1, x_3) \to \exists x_1[\forall x_2 \exists x_4 Q(x_2, x_4) \to \neg\forall x_3 Q(x_1, x_3)]$ escrita na mesma linguagem nenhuma variável ocorre livre, logo a fórmula é uma sentença.
Seja $\varphi = \exists x Q(x, y) \to P(f(x, 2y))$ uma outra fórmula na mesma linguagem. O termo z é livre para y em φ, mas o termo $f(x, z)$ não é livre para y em φ.

Intuitivamente uma variável pode ser substituída por um termo numa fórmula apenas quando não altera o significado da respectiva fórmula. Ou seja, ao substituirmos as ocorrências livres de uma variável por um termo, todas as variáveis do termo devem permanecer livres na fórmula. Desta maneira, a fórmula deve afirmar sobre o termo o mesmo que afirmava sobre a variável. O conceito de substituição não é um questão simples, ficará mais claro quando apresentarmos as regras para a Lógica de Primeira Ordem. Vejamos a definição de substituição de uma variável por um termo num termo.

Definição 3.2.28. *Sejam $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$. A substituição da variável x por um termo t em s e escrevemos $s[t/x]$, é definida recursivamente como se segue:*

i) se $s = y \in \mathcal{V}ar(\mathcal{L})$ então $y[t/x] = \begin{cases} y & se \quad y \neq x \\ t & se \quad y = x \end{cases}$;

ii) se $s = c \in \mathcal{F}_0$ então $c[t/x] = c$;

iii) se $s = f(t_1, \ldots, t_n), f \in \mathcal{F}_n$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$ então $f(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$.

Na definição que se segue estendemos a definição de substituição às fórmulas.

Definição 3.2.29. *A substituição da variável x por um termo t em φ, em símbolos $\varphi[t/x]$, é definida recursivamente como se segue:*

i) $\bot[t/x] = \bot$

$P(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = P(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$, $P \in \mathcal{R}_n$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$

Se a linguagem tiver o símbolo de igualdade $(t_1 \approx t_2)[t/x] = t_1[t/x] \approx t_2[t/x]$

ii) $(\varphi \to \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \to \psi[t/x]$

$(\varphi \wedge \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \wedge \psi[t/x]$

$(\varphi \vee \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \vee \psi[t/x]$

$(\neg\varphi)[t/x] = \neg\varphi[t/x]$

iii)

$$(\forall y\varphi)[t/x] = \begin{cases} \forall y(\varphi[t/x]) & se \quad x \neq y \\ \forall y\varphi & se \quad x = y \end{cases}$$

$$(\exists y\varphi)[t/x] = \begin{cases} \exists y(\varphi[t/x]) & se \quad x \neq y \\ \exists y\varphi & se \quad x = y \end{cases}$$

Exemplo 3.2.30. *Seja $\varphi = \forall x(P(x) \wedge s(x)) \rightarrow (\neg P(x) \vee s(y))$ na linguagem do Exemplo 3.2.22. Então $\varphi[f(x,y)/x] = \forall x(P(x) \wedge s(x)) \rightarrow (\neg P(f(x,y)) \vee s(y))$. E se $\varphi = \forall y(\neg P(x) \vee s(y))$ a fórmula $\varphi[f(x,y)/x]$ é $\forall y(\neg P(f(x,y)) \vee s(y))$. Neste último caso a variável y no termo $f(x,y)$ passa a estar ligada.*

Sejam x uma variável, t um termo e φ uma fórmula. Pode-se demonstrar por indução no comprimento de φ que o termo t é livre para x em φ se e só se as variáveis que ocorrem em t na fórmula $\varphi[t/x]$ não se encontrem ligadas por um quantificador (A prova detalhada pode ser encontrada em [15]). Assim, podemos dizer que t é livre para x em φ se nenhuma ocorrência livre em φ for da forma $\forall y\psi$, para qualquer variável y que ocorra em t. Neste caso dizemos que "x é substituível por t em φ".

Semântica

Consideremos agora os aspectos semânticos da Lógica de Primeira Ordem. Comecemos por ver o que é uma estrutura na linguagem $\mathcal{L}$:

Definição 3.2.31. *Uma **estrutura** de $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}$-estrutura é um par $\mathcal{M} = (D, V)$, onde D é um conjunto não vazio, chamado domínio de $\mathcal{M}$ e V é uma função, designada por **interpretação**, que atribui funções e relações definidas em D aos parâmetros de $\mathcal{L}$, do seguinte modo:*

- *a cada símbolo de função $f \in \mathcal{F}_n$, $n > 0$ atribui uma função n-ária $V(f) : D^n \longrightarrow D$;*
- *a cada símbolo de predicado $P \in \mathcal{R}_n$ atribui uma relação n-ária $V(P) \subseteq D^n$;*
- *a cada constante $c \in \mathcal{F}_0$ atribui um elemento $V(c) \in D$.*

A partir de agora passamos a escrever $f^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}$ *e* $c^{\mathcal{M}}$ em vez de $V(f), V(P)$ *e* $V(c)$ respectivamente.

Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem e $\mathcal{M} = (D, V)$ uma estrutura de $\mathcal{L}$. Uma função $I : \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow D$ é chamada de **atribuição de valores** às variáveis de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$. Esta função I pode ser estendida a uma função $\overline{I} : \mathcal{T}(\mathcal{L}) \longrightarrow D$ da seguinte forma:

i) para $x \in \mathcal{V}ar(\mathcal{L})$ o valor de $\overline{I}(x)$ é $I(x)$;

ii) se $c \in \mathcal{F}_0$ então $\overline{I}(c) = c^{\mathcal{M}}$;

iii) se $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$ e $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ então

$$\overline{I}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(\overline{I}(t_1), \overline{I}(t_2), \ldots, \overline{I}(t_n)).$$

A partir daqui, não faremos distinção entre $\overline{I}$ e I.

Exemplo 3.2.32. *Para ilustrar o conceito de atribuição de valores às variáveis considere-se a estrutura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, V)$ na linguagem do Exemplo 3.2.22, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais e a função de interpretação V é definida por:*

$V(c) = 0$; $\quad$ $V(P) = \mathrm{Pr} := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo}\}$;

$V(s) = S$, *com S a função sucessor;* $\quad$ $V(Q) = <:= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : n < m\}$

$V(f) = +$ *e* $V(g) = \times$.

De igual modo, como no caso das linguagens é habitual representar as estruturas como o uplo constituído pelo universo e pelas suas funções e relações concordando com a ordem estabelecida para a linguagem. Assim, a estrutura $\mathcal{N}$ pode ser representada por

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times, \mathrm{Pr}, < \rangle.$$

Consideremos a atribuição I em $\mathbb{N}$ tal que $v(x) = 2$. A função I atribui ao termo $s(x)$, $s(s(x))$ e $s(c)$ o valor 3, 4 e 1 respectivamente. Podemos observar que os termos $s(x)$ e $s(s(x))$ podem assumir outros valores nesta estrutura dependendo da atribuição, enquanto que o termo $s(c)$ assume sempre o valor 1 para qualquer que seja a atribuição de valores.

Vejamos quando é que uma estrutura satisfaz uma fórmula.

Definição 3.2.33. *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem, $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, $\mathcal{M} = (D, V)$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ e $I : \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow D$. Dizemos que a estrutura $\mathcal{M}$ **satisfaz** φ para a atribuição I ou I **satisfaz** φ em $\mathcal{M}$ e escrevemos $\mathcal{M} \models \varphi[I]$, se:*

i) φ é a fórmula atómica $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ para termos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e $P \in \mathcal{R}_n$ e tem-se $(I(t_1), \ldots, I(t_2)) \in P^{\mathcal{M}}$;

ii) φ *é a fórmula atómica* $t_1 \approx t_2$ *e* $I(t_1) = I(t_2)$*;*

iii) $\varphi = \neg\psi$ *e* $\mathcal{M} \nvDash \psi[I]$*;*

iv) $\varphi = \xi \wedge \psi$ *e tem-se* $\mathcal{M} \models \xi[I]$ *e* $\mathcal{M} \models \psi[I]$*;*

v) $\varphi = \xi \vee \psi$ *e tem-se* $\mathcal{M} \models \xi[I]$ *ou* $\mathcal{M} \models \psi[I]$*;*

vi) $\varphi = \xi \rightarrow \psi$ *e tem-se* $\mathcal{M} \nvDash \xi[I]$ *ou* $\mathcal{M} \models \psi[I]$*;*

vii) $\varphi = \forall x\psi$ *e* $\mathcal{M} \models \psi(I[a/x])$ *para todo* $a \in D$*, onde* $I[a/x]$ *é definido como se segue*

$$I[a/x](y) = \begin{cases} I(y), & se \quad y \neq x \\ a, & se \quad y = x; \end{cases}$$

viii) $\varphi = \exists x\psi$ *e* $\mathcal{M} \models \psi(I[a/x])$ *para algum* $a \in D$*, onde* $I[a/x]$ *é definido como em (vii).*

Exemplo 3.2.34. *Seja* $\mathcal{N}$ *a estrutura apresentada no Exemplo 3.2.32. Considere-se a atribuição* $I : Var(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{N}$ *tal que* $I(x) = 2$ *e* $I(y) = 1$*. Como* $0 < 2$ *tem-se* $\mathcal{N} \models Q(c, x)[I]$*. No entanto,* $\mathcal{N} \models Q(x, y)[I]$ *não se verifica.*

Consideremos agora a fórmula $\varphi = \forall x Q(c, s(x))$*. Não é difícil verificar que qualquer que seja a atribuição* I*,* $\mathcal{N} \models \varphi[I]$*.*

Definição 3.2.35. *Uma fórmula* $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ *é* ***satisfazível*** *ou* ***realizável*** *se existir uma estrutura* $\mathcal{M} = (D, V)$ *de* $\mathcal{L}$ *e uma atribuição* $I : \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow D$ *tal que* $\mathcal{M} \models \varphi[I]$*. Dizemos que* φ *é* ***válida*** *em* $\mathcal{M}$*, e escrevemos* $\mathcal{M} \models \varphi$ *se* $\mathcal{M} \models \varphi$ *para qualquer atribuição* $I : \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow D$ *e dizemos que* φ *é* ***realizável*** *em* $\mathcal{M}$ *se existe uma atribuição* $I : \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow D$ *tal que* $\mathcal{M} \models \varphi[I]$*. Se para qualquer* $\mathcal{M}$ *e qualquer atribuição* I *tivermos* $\mathcal{M} \models \varphi[I]$ *então dizemos que* φ *é uma* ***fórmula válida*** *e escrevemos* $\models \varphi$*. Uma estrutura* $\mathcal{M}$ *satisfaz um conjunto de fórmulas* $\Gamma \subseteq Form(\mathcal{L})$ *na atribuição* I*, e escrevemos* $\mathcal{M} \models \Gamma[I]$*, se para qualquer* $\varphi \in \Gamma \quad \mathcal{M} \models \varphi[I]$*. Uma fórmula* φ *é* ***consequência semântica de*** Γ *e escrevemos* $\Gamma \models \varphi$*, se para toda estrutura* $\mathcal{M}$ *de* $\mathcal{L}$ *e toda atribuição* I *tal que* $\mathcal{M} \models \Gamma[I]$ *tem-se que* $\mathcal{M} \models \varphi[I]$*.*

Observação: Prova-se que uma sentença é realizável numa estrutura se e só se é válida nessa estrutura.

Vejamos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 3.2.36. *1) Consideremos a fórmula* $\varphi = \exists y Q(x, y)$ *da linguagem* $\mathcal{L}$ *do Exemplo 3.2.22 e a estrutura* $\mathcal{N}$ *definida no Exemplo 3.2.32.*

Qualquer atribuição I com $I(x) = 3$ satisfaz a fórmula φ em $\mathcal{N}$. Se substituímos x por $s(x)$ em φ a fórmula resultante, $\exists y Q(s(x), y)$, continua a ser satisfeita por I. Se substituirmos x por y em φ obtemos a fórmula $\exists y Q(y, y)$ que não é satisfeita por nenhuma atribuição e, portanto não é realizável em $\mathcal{N}$.

Seja agora $\Gamma = \{\forall x \forall y(s(x) \approx s(y) \rightarrow x \approx y), \forall x(Q(c, s(x)))\}$. Não é difícil verificar que $\mathcal{N} \models \Gamma$.

2) A fórmula $\exists x x \approx x$ é uma exemplo de uma forma válida.

O significado de uma fórmula depende dos valores atribuídos às suas variáveis livres. Assim, ao substituirmos as ocorrências livres de uma variável por um termo, o papel do termo na fórmula deveria ser o mesmo da variável na fórmula antes da substituição, no sentido de que a fórmula poderá ser realizável ou não, dependendo do valor que o termo toma para uma atribuição.

3.2.3 Dedução Natural

O tratamento da Lógica de Primeira Ordem apresentado aqui distingue-se do habitual tratamento por axiomas e regras de inferência devido a que o nosso objectivo é analisar algumas prova do ensino secundário usando este sistema dedutivo ([51]).

As regras de inferência para a Dedução Natural na Lógica de Primeira Ordem **sem igualdade** são as regras de inferência de Dedução Natural para a LPC, formuladas para as fórmulas de primeira ordem, mais quatro regras envolvendo quantificadores. Na seguinte tabela estão as novas regras. Estas estão sujeitas a restrições bem definidas indicadas por (*), (**), (***) e (****) a seguir à tabela.

	Regras de Introdução	Regras de Eliminação
$\forall$	$\dfrac{\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)}(*)$	$\dfrac{\forall x\varphi(x)}{\varphi[t/x]}(**)$
$\exists$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi(x)}(***)$	$\dfrac{\exists x\varphi(x) \qquad \begin{matrix}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{matrix}}{\psi}(****)$

Tabela 3.3.2: Regras de DN.

(*) Esta regra apenas pode ser aplicada quando a variável x não ocorre livre em nenhuma das hipóteses da qual $\varphi(x)$ dependa. Isto é, x não pode ser livre em nenhuma hipótese aberta na dedução de $\varphi(x)$. De uma forma intuitiva, se x for um objecto arbitrário de um determinado domínio e se deduzimos que x tem a propriedade φ, sem condições prévias sobre x então, podemos concluir que qualquer objecto x do domínio tem esta propriedade φ. Isto é, $\forall x\varphi(x)$. A relevância da restrição (*) é posta em evidência na seguinte pseudo-derivação:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[P(x)]^1}{\forall x P(x)}\,(\forall \text{ int})}{P(x) \rightarrow \forall x(P(x)}\,(\rightarrow \text{int}^1)}{\forall x(P(x) \rightarrow \forall x\ P(x))}\,(\forall \text{ int})}{P(c) \rightarrow \forall x(P(x)}\,(\forall \text{ elim})$$

Facilmente se verifica que a última fórmula não é válida. Pois caso fosse válida, em qualquer estrutura com um predicado unário e uma constante, se tal constante tem a propriedade P, então todos os elementos têm a propriedade P. Por exemplo uma estrutura com um universo $\mathbb{N}$ e em que c é interpretado como 2 e P é interpretado como o conjunto dos números primos a fórmula não é válida nessa estrutura "2 é primo e nem todos os naturais são primos". Obviamente que não queremos construir um cálculo que permita provar fórmulas que não sejam válidas.

(**) Esta regra apenas pode ser aplicada quando o termo t é livre para x em φ. Intuitivamente, se consideremos que qualquer objecto x de um determinado domínio tem a propriedade φ isto é, $\forall x\varphi(x)$ e que t pertence ao domínio anteriormente considerado então, t tem esta propriedade, isto é, $\varphi(t)$. ($\varphi(t)$ é o resultado da substituição da ocorrência livre de x em $\varphi(x)$ por t.) O contra-exemplo que apresentamos, numa linguagem com igualdade, ilustra a importância da restrição colocada nesta regra. Consideremos a seguinte pseudo-derivação:

$$\cfrac{\cfrac{[\forall x \neg \forall y(x \approx y)]^1}{\neg \forall y(y \approx y)}\,(\forall \text{ elim})}{\forall x \neg \forall y(x \approx y) \rightarrow \neg \forall y(y \approx y)}\,(\rightarrow \text{int}^1)$$

Como y não é livre para x em $\neg\forall y(x \approx y)$ então a eliminação de $\forall x$ no segundo passo está incorrecto.

No que diz respeito às outras regras vamos apenas apresentar as restrições e um contra-exemplo que justifica as restrições.

(***) Esta regra apenas pode ser aplicada quando o termo t é livre para x em φ. Para verificar a necessidade desta restrição considere-se $\varphi(x) = \forall y(x < y+1)$ e $t = y$ numa linguagem apropriada. Ignorando a restrição temos a seguinte pseudo-derivação $\dfrac{\forall y(y < y+1)}{\exists x \forall y(x < y+1)}$ que não pode ser admitida.

(****) Esta regra apenas pode ser aplicada quando a variável x não ocorre livre em ψ nem em nenhuma das hipóteses abertas da dedução de ψ distintas de $\varphi(x)$. Esta restrição impede a seguinte pseudo-derivação $\dfrac{\exists x(x \approx c) \qquad [x \approx c]}{x \approx c}$ que não deve ser admitida.

Antes de ver alguns exemplos de prova no sistema de Dedução Natural para a Lógica de Primeira Ordem vejamos a seguinte definição de consequência sintáctica para a Lógica de Primeira Ordem.

Definição 3.2.37. *Sejam* $\Gamma \subseteq Form(\mathcal{L})$ *e* $\varphi \in Form(\mathcal{L})$*. Dizemos que* φ *é uma* ***consequência sintáctica*** *de* Γ*, em símbolos* $\Gamma \vdash_{DN} \varphi$*, se existe uma árvore de prova* X *tal que as folhas não canceladas (hipóteses abertas) de* X *formam um subconjunto de* Γ *e a raiz de* X *é* φ*.*

Sempre que não exista perigo de confusão omitiremos a referência DN. Como é habitual, se $\Gamma = \emptyset$ escrevemos simplesmente $\vdash \varphi$ e dizemos que φ é um **teorema**.

Vejamos os exemplos:

1) $\vdash \forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(x,y)$.

$$\scriptstyle(\to\text{ int }1)\ \displaystyle\frac{\scriptstyle(\forall\text{ int})\ \displaystyle\frac{\scriptstyle(\forall\text{ int})\ \displaystyle\frac{\scriptstyle(\forall\text{ elim})\ \displaystyle\frac{\scriptstyle(\forall\text{ elim})\ \displaystyle\frac{[\forall x \forall y P(x,y)]^1}{\forall y P(z,y)}}{P(z,s)}}{\forall x P(x,s)}}{\forall y \forall x P(x,y)}}{\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(x,y)}$$

2) $\neg \forall x \neg \varphi(x) \vdash \exists x \varphi(x)$.

$$\scriptstyle(\text{RA }1)\ \displaystyle\frac{\scriptstyle(\neg\text{ elim})\ \displaystyle\frac{\neg \forall x \neg \varphi(x) \qquad \scriptstyle(\forall\text{ int})\ \displaystyle\frac{\scriptstyle(\neg\text{ int }2)\ \displaystyle\frac{\scriptstyle(\neg\text{ elim})\ \displaystyle\frac{[\neg \exists x \varphi(x)]^1 \qquad \scriptstyle(\exists\text{ int})\ \displaystyle\frac{[\varphi(y)]^2}{\exists x \varphi(x)}}{\perp}}{\neg \varphi(y)}}{\forall x \neg \varphi(x)}}{\perp}}{\exists x \varphi(x)}$$

3) $\vdash \forall x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x \psi(x))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi \to \psi(x))]^1}{\varphi \to \psi(y)}\,(\forall\text{ elim}) \quad [\varphi]^2}{\psi(y)}\,(\to\text{ elim})}{\forall x\psi(x)}\,(\forall\text{ int})}{\varphi \to \forall x\psi(x)}\,(\to\text{ int } 2)}{\forall x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x\psi(x))}\,(\to\text{ int } 1)
$$

4) $\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))]^1}{\varphi(y) \to \psi(y)}\,(\forall\text{ elim}) \qquad \dfrac{[\forall x\varphi(x)]^2}{\varphi(y)}}{\psi(y)}\,(\to\text{ elim})}{\forall x\psi(x)}\,(\forall\text{ int } 2)}{\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x)}\,(\to\text{ int } 2)}{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x))}\,(\to\text{ int } 1)
$$

Dedução Natural para a Lógica de Primeira Ordem com Igualdade

Veremos a seguir que as regras do sistema de Dedução Natural para a LPO com igualdade é diferente das regras do sistema de Dedução Natural para a LPO sem igualdade. Para a LPO com igualdade precisamos de acrescentar as regras de introdução e eliminação do símbolo de igualdade $\approx$ correspondentes aos axiomas de igualdade usuais.

i) $\dfrac{}{x \approx x}$ (Introdução de $\approx$). Podemos derivar sempre que um termo x é igual a si próprio;

ii) $\dfrac{x \approx y}{y \approx x}$;

iii) $\dfrac{x \approx y \quad y \approx z}{x \approx z}$;

iv) $\dfrac{x_1 \approx y_1, \ldots, x_n \approx y_n}{t(x_1, \ldots, x_n) \approx t(y_1, \ldots, y_n)}$;

v) $\dfrac{x_1 \approx y_1, \ldots, x_n \approx y_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\varphi(y_1, \ldots, y_n)}$ (Eliminação de $\approx$). Onde $y_1, \ldots, y_n$ é livre para $x_1, \ldots, x_n$ em φ.

Observe-se que (i), (ii), (iii) e (iv) mantêm-se para termos quaisquer e não só para variáveis ([15]).

Adicionando estas regra às anteriores conseguimos demonstrar que os habituais axiomas de igualdade são teoremas neste cálculo ([15]):

i) Reflexividade: $\forall x(x \approx x)$;

ii) Simetria: $\forall x, \forall y(x \approx y \rightarrow y \approx x)$;

iii) Transitividade: $\forall x, \forall y, \forall z(x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)$;

iv) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i \leq n} x_i \approx y_i \rightarrow t(x_1 \ldots x_n) \approx t(y_1 \ldots y_n))$;

v) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i \leq n} x_i \approx y_i \rightarrow (\varphi(x_1 \ldots x_n) \rightarrow \varphi(y_1 \ldots y_n)))$, onde $x,\ y$ e z são variáveis, t é termo e φ é uma fórmula de primeira ordem.

O sistema da Dedução Natural para a Lógica de Primeira Ordem é correcto e completo. Para já, enunciamos e demonstramos o teorema de correcção.

Teorema 3.2.38. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Sejam Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ e φ uma fórmula de $\mathcal{L}$. Então*

$$\Gamma \vdash \varphi \ \Rightarrow \ \Gamma \models \varphi.$$

Demonstração. A demonstração é análoga à correcção do sistema de Dedução Natural para o LPC. A parte correspondente às regras do Cálculo Proposicional é simples dada a definição da relação $\models$. A parte mais complexa é a demonstração de que as regras que envolvem os quantificadores $\forall$ e $\exists$ preservam a validade das fórmulas. Vejamos apenas para as regras de eliminação de $\exists$ e introdução de $\forall$. A demonstração para as outras regras faz-se de forma análoga.

• Eliminação de $\exists$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & [\varphi] \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists x \varphi(x) & \psi \end{array}}{\psi}$$

Seja Γ um conjunto de fórmulas que contem as hipóteses abertas da derivação

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & [\varphi] \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists x \varphi(x) & \psi \end{array}}{\psi}$$

Por hipótese de indução temos que:

(1) se Γ' contem as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \exists x\varphi(x)\end{array}$ então $\Gamma' \models \exists x\varphi(x)$.

(2) Se Γ'' contem as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}_2\\ \psi\end{array}$ então $\Gamma'' \models \psi$.

Considere-se Γ' e Γ'' contendo exactamente as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \exists x\varphi(x)\end{array}$ e $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}_2\\ \psi\end{array}$ respectivamente. Então $\Gamma \supseteq \Gamma'$ e $\Gamma \cup \{\varphi\} \supseteq \Gamma''$.

Seja $\mathcal{M} = (M, V)$ uma estrutura apropriada e $I : \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow M$. Suponhamos que
a) $\mathcal{M} \models \xi[I]$ para todo $\xi \in \Gamma$. Por hipótese de indução
b) $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[I]$.
Por b) existe $m \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[I[m/x]]$.
Pelas condições de aplicação desta regra, x não ocorre livre nas hipóteses não canceladas distintas de φ na derivação $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$. Donde, por a), $\mathcal{M} \models \xi[I[m/x]]$ para todo $\xi \in \Gamma' \backslash \{\varphi\}$ e consequentemente, $\mathcal{M} \models \xi[I[m/x]]$ para todo $\xi \in \Gamma'$. Por hipótese de indução vem $\mathcal{M} \models \psi[I[m/x]]$.
Como x não ocorre livre em ψ, facilmente se conclui que $\mathcal{M} \models \psi[I]$. O que mostra que $\Gamma \models \psi$.

- Introdução de $\forall$:

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi(x)\\ \hline \forall x\varphi(x)\end{array}$$

Seja Γ um conjunto de fórmulas que contem as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi(x)\\ \hline \forall x\varphi(x)\end{array}$. Por hipótese de indução temos que se Γ' é um conjunto de fórmulas que contem as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ então $\Gamma' \models \varphi$.
Considere-se Γ' o conjunto de fórmulas que contem exactamente as hipóteses abertas de $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$. Claramente $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Seja $\mathcal{M} = (M, V)$ uma estrutura apropriada e $I : \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow M$. Suponhamos que $\mathcal{M} \models \psi[I]$ para todo $\psi \in \Gamma$. Dado que x não ocorre livre em nenhuma fórmula de Γ' temos que para todo $m \in M$. $\mathcal{M} \models \psi[I]$ para todo $\psi \in \Gamma'$ sse $\mathcal{M} \models \psi[I[m/x]]$ para todo $\psi \in \Gamma'$ e para todo $m \in M$. Donde, por hipótese de indução para todo $m \in M$ $\mathcal{M} \models \varphi[I[m/x]]$, isto é, $\mathcal{M} \models \forall x\varphi[I]$.
Não é difícil verificar que as regras de inferência da igualdade, no caso da linguagem ter igualdade, também transmitem a "satisfactibilidade"das premissas para a conclusão. $\square$

Para a demonstração do teorema da completude precisamos de algumas definições, lemas e teoremas, que passamos a seguir a enunciar.

Definição 3.2.39. *Dizemos que um conjunto Γ de fórmulas de primeira ordem é **consistente** se $\Gamma \nvdash \perp$. Caso contrário, dizemos que Γ é **inconsistente**.*

Definição 3.2.40. *(i) Uma **teoria** T numa linguagem $\mathcal{L}$ é um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$ fechado por consequência sintáctica (i.e., $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$).*

*(ii) A **teoria induzida** por um conjunto de sentenças é o conjunto das sentenças dedutíveis a partir desse conjunto.*

*(iii) Dadas as teorias T e T' em linguagens $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, respectivamente, com $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, T' diz-se uma **extensão** de T se $T \subseteq T'$ e diz-se uma **extensão conservativa** de T se verifica adicionalmente que $T' \cap Form(\mathcal{L}) = T$.*

Note-se que contrariamente ao habitual em matemática, definimos uma teoria como um conjunto de sentenças fechado por aplicações das regras de inferência, por exemplo, a teoria de grupos consiste em todos os teoremas derivados a partir dos clássicos axiomas de grupo e não apenas nas sentenças que expressam associatividade, existência de elemento neutro e existência de inverso para cada elemento.

Definição 3.2.41. *(i) Uma teoria T numa linguagem $\mathcal{L}$ diz-se uma **teoria de Henkin** se, para cada sentença da forma $\exists x\varphi(x)$, existe uma constante c tal que $\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \in T$ (c é chamada **realizador** de $\exists x\varphi(x)$). (ii) Dada uma teoria T numa linguagem $\mathcal{L}$, definimos $\mathcal{L}^*$ como a linguagem obtida de $\mathcal{L}$ adicionando um nova constante c para cada sentença $\exists x\varphi(x)$ de $\mathcal{L}$; Denotaremos por T^* a teoria em $\mathcal{L}^*$ induzida por $T \cup Henk(\mathcal{L})$, onde $Henk(\mathcal{L}) = \{\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c_\varphi) | \exists x\varphi(x)$ é sentença de $\mathcal{L}$ com realizador $c_\varphi\}$.*

Prova-se que T^* é uma extensão conservativa de T ([15]). Dado que ao introduzirmos novas constantes geramos mais fórmulas existenciais, não podemos garantir que

T^* é uma teoria de Henkin. Para ultrapassar esta questão vamos considerar a seguinte construção.

Seja T uma teoria. Defina-se recursivamente a teoria T_ω por

$T_0 = T$;

$T_{n+1} = T_n^*$ e

$T_\omega = \bigcup_{n<\omega} T_n$.

Defina-se ainda as correspondentes linguagens $\mathcal{L}_n$, $(n \geq 0)$ e $\mathcal{L}_\omega$.

Teorema 3.2.42. *T_ω é uma teoria de Henkin na linguagem $\mathcal{L}_\omega$ que estende conservativamente T. Além do mais, T_ω é consistente sempre que T o for.*

Demonstração. Primeiro, prova-se por indução que cada T_n é uma teoria que estende conservativamente T. Por outro lado, T_ω é uma teoria. Consequentemente, T_ω é extensão conservativa de T. Da forma como definimos T_ω conclui-se que T_ω é uma teoria de Henkin.

Para demonstrar a segunda parte, suponhamos que T é conservativa. Então $T \nvdash \perp$. Como T_ω é extensão conservativa de T, então $T_\omega \nvdash \perp$. $\square$

Definição 3.2.43. *Dizemos que um conjunto de sentença Γ é **consistente maximal** se Γ é consistente e não existe um conjunto, na mesma linguagem, consistente que o contenha propriamente.*

Seja T uma teoria consistente. Considere-se o conjunto Λ das teorias consistentes que estendem T. O conjunto Λ é parcialmente ordenado para a inclusão de conjuntos. Mostra-se que todas as cadeias de Λ são limitadas superiormente pela sua reunião, (ver [15]), donde o Lema de Zorn garante a existência de uma teoria consistente maximal a estender T. Assim, podemos afirmar que qualquer teoria consistente pode ser estendida a uma teoria consistente maximal.

Também não é difícil verificar que uma extensão de uma teoria de Henkin, sobre a mesma linguagem, é ainda uma teoria de Henkin. De facto, uma vez que, não existe alteração da linguagem, o conjunto de sentenças existenciais para as quais é necessário garantir a existência de um realizador mantém-se.

Conjugando estes dois resultados temos:

Teorema 3.2.44. *Uma teoria consistente T numa linguagem $\mathcal{L}$ pode ser estendida a uma teoria de Henkin consistente maximal na linguagem $\mathcal{L}_\omega$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.42, T_ω é uma teoria de Henkin, na linguagem $\mathcal{L}_\omega$ que estende T, e é consistente. Pelas duas observações anteriores, existe uma teoria T, na mesma linguagem, que estende T_ω, é consistente maximal e é de Henkin. □

Enunciamos a seguir o teorema de completude do sistema de Dedução Natural para a Lógica de Primeira Ordem.

Teorema 3.2.45 (Completude)**.** *Sejam* Γ *um conjunto de sentenças de primeira ordem e* φ *uma sentença de primeira ordem. Então,* $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

Em seguida vamos estabelecer uma condição equivalente ao teorema de Completude (será esta condição que iremos provar). Primeiro apresentamos um lema.

Lema 3.2.46. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *é inconsistente se e só se* $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração. A prova resulta da aplicação directa das regras de inferência da Dedução Natural, nomeadamente das regras de introdução e eliminação da negação. □

Proposição 3.2.47. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Para qualquer conjunto de sentenças Γ *e qualquer sentença* φ*, se* $\Gamma \models \varphi$ *então* $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Qualquer conjunto consistente de sentenças é realizável.

Demonstração. A prova resulta do Lema 3.2.46 e do seguinte facto semântico

"$\Gamma \cup \{\varphi\}$ não é realizável se e só se $\Gamma \models \neg\varphi$." □

A estratégia para demonstrar a condição (ii) (e consequentemente o teorema de Completude) é a seguinte: dado um conjunto consistente de sentenças Γ, vamos construir uma estrutura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$. Essa estrutura será construída sobre o conjunto dos termos fechados da linguagem subjacente. Vamos passar a descrever o processo de construção dessa estrutura.

Seja Γ um conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}$. Considere-se a teoria induzida por Γ que denotamos por T. Claramente, T é uma teoria consistente e, pelo Teorema 3.2.44, pode ser estendida a uma teoria de Henkin Δ, consistente maximal, na linguagem $\mathcal{L}_\omega$.

Considere-se o conjunto $\mathcal{T}$ dos termos fechados de $\mathcal{L}_\omega$ defina-se a estrutura $\mathcal{M} = (D, V)$ para esta linguagem com universo $D = \mathcal{T}$ e a função de interpretação V definida por

- Para cada símbolo relacional $P \in \mathcal{R}_n, n > 1$,

$$P^{\mathcal{M}} = \{(t_1, \ldots, t_n) : \Delta \vdash P(t_1, \ldots, t_n)\};$$

- Para cada símbolo funcional $f \in \mathcal{F}_n, n > 0$,

$$f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n);$$

- Para cada constante c,

$$c^{\mathcal{M}} = c.$$

Considere-se agora a relação binária $\diamond$ em $\mathcal{T}$ definida por:

$$t_0 \diamond t_1 \text{ se e só se } \Delta \vdash t_0 \approx t_1.$$

Usando as regras de inferência para a igualdade prova-se que $\diamond$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{T}$ que é uma congruência relativamente aos símbolos de relação e aos símbolos de função de $\mathcal{L}_\omega$.

Considere-se o quociente da estrutura $\mathcal{M}/\diamond = (D_\diamond, V_\diamond)$:

$D_\diamond$ é o conjunto das classes de equivalências de $\diamond$, i.e., $D_\diamond = \{[t] : t \in \mathcal{T}\}$, onde [t] denota a $\diamond$-classe de equivalência de t;

A função interpretação $V_\diamond$ é definida por

- Para cada símbolo relacional $P \in \mathcal{R}_n, n > 1$,

$$P^{\mathcal{M}/\diamond} = \{([t_1], \ldots, [t_n]) : (t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathcal{M}}\};$$

- Para cada símbolo funcional $f \in \mathcal{F}_n, n > 0$,

$$f^{\mathcal{M}/\diamond}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n)];$$

- Para cada constante c,

$$c^{\mathcal{M}/\diamond} = [c^{\mathcal{M}}].$$

A estrutura $\mathcal{M}/\diamond$ é chamada de estrutura **canónica**.

Por indução sobre termos prova-se o seguinte resultado.

Lema 3.2.48. *$t^{\mathcal{M}/\diamond} = [t]$ para qualquer termo fechado t de $\mathcal{L}_\omega$, onde $t^{\mathcal{M}/\diamond}$ denota o valor do termo fechado t em $\mathcal{M}/\diamond$.*

Por fim temos o seguinte lema:

Lema 3.2.49. *$\mathcal{M}/\diamond \models \varphi$ se e só se $\Delta \vdash \varphi$, para qualquer sentença φ de $\mathcal{L}_\omega$.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre φ.

i)

- Caso $\varphi = t_1 \approx t_2$. Tem-se, $\mathcal{M}/\diamond \models t_1 \approx t_2 \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}/\diamond} = t_2^{\mathcal{M}/\diamond} \Leftrightarrow [t_1] = [t_2] \Leftrightarrow t_1 \diamond t_2 \Leftrightarrow \Delta \vdash t_0 \approx t_1$.

- Caso $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Tem-se, $\mathcal{M}/\diamond \models P(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}/\diamond}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}/\diamond}) \in P^{\mathcal{M}/\diamond} \Leftrightarrow (t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \Delta \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$.

- Caso $\varphi =\perp$ é obvio.

ii) Caso $\varphi = \neg\psi$. Tem-se, $\mathcal{M}/\diamond \models \neg\psi \Leftrightarrow \mathcal{M}/\diamond \not\models \psi$, e por hipótese de indução $\Delta \nvdash \psi$, logo por Δ ser consistente maximal, $\Delta \nvdash \varphi$.

iii) Os casos $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ ou $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ou $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$, provam-se de forma análoga ao caso (ii).

iv) Caso $\varphi = \forall x\psi(x)$. Tem-se, $\mathcal{M}/\diamond \models \forall x\psi(x) \Leftrightarrow \mathcal{M}/\diamond \models \neg\exists x\neg\psi(x) \Leftrightarrow \mathcal{M}/\diamond \not\models \exists x\neg\psi(x)$. Como Δ é de Henkin tem-se que $\exists x\neg\psi(x) \rightarrow \neg\psi(c) \in \Delta$, para alguma constante c. Assumindo $\mathcal{M}/\diamond \models \forall x\psi(x)$ vem que $\mathcal{M}/\diamond \models \psi(c)$. Por hipótese de indução $\Delta \vdash \psi(c)$. Por outro lado $\Delta \vdash \exists x\neg\psi(x) \rightarrow \neg\psi(c)$, donde $\Delta \vdash \psi(c) \rightarrow \neg\exists x\neg\psi(x)$. Por modus ponens $\Delta \vdash \neg\exists x\neg\psi(x)$, e portanto $\Delta \vdash \forall x\psi(x)$.

Reciprocamente, se $\Delta \vdash \forall x\psi(x)$ então, por eliminação de $\forall$, tem-se $\Delta \vdash \psi(t)$ para qualquer termo fechado t. Logo, por hipótese de indução, $\mathcal{M}/\diamond \models \psi(t)$ para todo o termo fechado t. Ou seja, $\mathcal{M}/\diamond \models \forall x\psi(x)$.

v) Caso $\varphi = \exists x\psi(x)$. Suponhamos que $\mathcal{M}/\diamond \models \exists x\psi(x)$. Então $\mathcal{M}/\diamond \models \psi(t)$ para certo $t \in T_\omega$. Por hipótese de indução, $\Delta \vdash \psi(t)$. Donde, pela regra ($\exists$ int), $\Delta \vdash \exists x\psi(x)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Delta \vdash \exists x\psi(x)$. Como Δ é de Henkin, $\Delta \vdash \exists x\psi(x) \Rightarrow \psi(c)$ para certa constante nova c. Por modus ponens $\Delta \vdash \psi(c)$. Por hipótese de indução temos $\mathcal{M}/\diamond \models \psi(c)$. E portanto, $\mathcal{M}/\diamond \models \exists x\psi(x)$.

□

Deste último Lema concluímos que $\mathcal{M}/\diamond$ é um modelo de Δ e, consequentemente, o reduto deste modelo à linguagem $\mathcal{L}$ é um modelo de Γ.

O Teorema da Completude do sistema de Dedução Natural para a Lógica de Primeira Ordem está formulado para sentenças. No entanto o teorema também é válido para fórmulas arbitrárias. Apresentamos apenas um esboço da demonstração.

O argumento é o seguinte:

Como foi demonstrado, mostrar o teorema da completude é equivalente a mostrar que todo o conjunto consistente de fórmulas é realizável.

Seja Γ um conjunto consistente de fórmulas de $\mathcal{L}$. Considere-se um conjunto numerável C de novas constantes que não estão na nossa linguagem $\mathcal{L}$. Seja $\mathcal{L}'$ a extensão de $\mathcal{L}$ acrescentado essas novas constantes. Para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$, considere-se a lista $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ das variáveis livres que ocorrem em φ. Considere-se ainda uma lista $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de constantes distintas em C.

Para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$, $\bar{\varphi}$ denota a fórmula de $\mathcal{L}'$ obtida de φ substituindo cada variável livre x_i pela constante c_i, $1 \leq i \leq n$, i.e., $\bar{\varphi} = \varphi[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n]$. Seja $\Gamma' = \{\bar{\varphi} : \varphi \in \Sigma\}$. Não é difícil verificar que Γ' é um conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}'$. Finalmente, aplicando o teorema de Completude obtém-se o resultado.

Teorema 3.2.50. *Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$. Então, $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.*

3.3 Cálculo de Gentzen

Como tínhamos dito, o estudo das prova constitui o principal objectivo da teoria da prova que está no centro de desenvolvimento de programação em lógica e teoria da computação em geral. Por isso, existem muitos trabalhos no sentido de desenvolver cálculos mais eficientes para a demonstração num determinado sistema lógico [36]. Apresentaremos, de forma sucinta, dois desses cálculos (Gentzen e Smullyan) que consideramos particularmente interessante. O contributo dos cálculos escolhidos foi determinante para escolher o cálculo de Dedução Natural para aplicar no ensino secundário. Pois, estudar e comparar esses cálculos é que permitiu concluir que o sistema de Dedução Natural podia facilitar a compreensão de algumas demonstrações no ensino secundário. Começamos esta secção com o cálculo de Gentzen para a Lógica Proposicional Clássica dando a conhecer alguns aspectos importantes.

O sistema $\mathcal{G}$ de Gentzen foi introduzido por Gerhard Gentzen (matemático alemão), para verificar se uma fórmula φ é tautologia, através do método de refutação, tentando encontrar um valor que a torna falsa. Para tal, construímos uma árvore por forma a encontrarmos uma valoração que torna verdadeiras todas as fórmulas que ocorrem do lado esquerdo do par que compõe o nó da árvore e torna falsas todas as fórmulas que ocorrem do lado direito desse par [19]. A esse par de sequências finitas de fórmulas chamamos **sequente**.

Definimos a seguir de uma maneira formal um sequente:

Definição 3.3.1. *Sejam* $\Gamma = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ *e* $\Delta = \langle B_1, \dots, B_l \rangle$ *sequências finitas de fórmulas proposicionais. Um* ***sequente*** *é uma expressão da forma* $\Gamma \mapsto \Delta$. *Chamamos* ***antecedente*** *a* Γ *e* ***consequente*** *a* Δ. Γ *pode ser vazio ou* Δ *pode ser vazio. Quando ambas forem o vazio denotamos o sequente por* $\perp$.

Informalmente, dizemos que um sequente é válido se a conjunção de todas as fórmulas no antecedente implica a disjunção de todas as fórmulas no consequente. Vejamos:

Definição 3.3.2. *Sejam* $\Gamma \mapsto \Delta$ *um sequente e* v *uma valoração. Dizemos que* v ***satisfaz*** $\Gamma \mapsto \Delta$ *se e só se toda a valoração* v *que satisfaça* Γ *satisfaz pelo menos uma fórmula em* Δ.

Definimos $\bigwedge \Gamma := A_1 \wedge \cdots \wedge A_k$ e $\bigvee \Delta := B_1 \vee \cdots \vee B_j$.

Vejamos a seguinte proposição:

Proposição 3.3.3. *O sequente* $\Gamma \mapsto \Delta$ *é válido sse para toda a valoração* v

$$v(\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta) = 1.$$

Ou seja, $v(\bigwedge \Gamma) = 0$ *e* $v(\bigvee \Delta) = 0$ ou $v(\bigwedge \Gamma) = 0$ *e* $v(\bigvee \Delta) = 1$ ou $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ *e* $v(\bigvee \Delta) = 1$, isto é,

$$v(\bigwedge \Gamma) \leq \quad v(\bigvee \Delta)$$

Vejamos dois exemplos de sequentes válidos:

Exemplo 3.3.4. *Sejam* $A, B, C \in$ ***Prop***. *Os seguintes sequentes são válidos:*

a) $\langle C, B \rangle \ \mapsto \ \langle A, B \rangle$

b) $\langle A \vee C, \quad B \vee \ \neg C \rangle \ \mapsto \langle A, \ B \rangle$.

Seja $\Gamma = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ e $A \in$ **Prop**. Escrevemos Γ, A para referirmos à sequência $\langle A_1, \dots, A_k, A \rangle$. Outras simplificações irão ser assumidas sem fazermos referências explícitas. A partir de agora passamos a escrever uma sequência finita $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ de fórmulas simplesmente por $A_1, \dots, A_k$.

Definição 3.3.5. *Um* ***axioma*** *é um sequente* $\Gamma \to \Delta$ *tal que* Γ *e* Δ *tem pelo menos uma fórmula em comum.*

No cálculo de Gentzen para a lógica proposicional clássica as regras de inferência estão divididas em regras fracas e regras fortes. Temos para cada conectivo uma regra à direita e uma regra à esquerda.

1) Na tabela seguinte estão as regras fracas para o cálculo $\mathcal{G}$ de Gentzen. Na coluna mais à esquerda estão os nomes das regras. Sejam Γ, Δ, Π, Λ conjuntos de fórmulas e $A, B \in$ **Prop** ([20] e [19]). Aqui consideramos a linguagem proposicional sem o símbolo de falsidade.

	Esquerda	Direita
Troca	$\dfrac{\Gamma, A, B, \Pi \mapsto \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \mapsto \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \mapsto \Delta, B, A, \Lambda}$
Contracção	$\dfrac{A, A, \Gamma \mapsto \Delta}{A, \Gamma \mapsto \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta, A, A}{\Gamma \mapsto \Delta, A}$
Enfraquecimento	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta}{A, \Gamma \mapsto \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta}{\Gamma \mapsto \Delta, A}$

Tabela: Regras fracas.

A regra de troca é semelhante à regra de comutatividade ou seja, podemos trocar a ordem das fórmulas no antecedente ou no consequente que não altera o valor do sequente. A regra de contracção permite-nos eliminar uma fórmula que está repetida no antecedente ou no consequente sem alterar o valor do sequente. A regra de enfraquecimento permite-nos adicionar uma fórmula qualquer ao antecedente ou consequente que não altera o valor do sequente.

2) A seguir apresentamos as regras fortes, que são a regra do corte e as regras proposicionais.

i) Regra do corte:

$$\frac{\Gamma \mapsto \Delta, A \qquad A, \Gamma \mapsto \Delta}{\Gamma \mapsto \Delta}$$

A regra do corte permite-nos eliminar uma fórmula de dois sequentes quando num aparece no antecedente e no outro no consequente.

ii) Na tabela seguinte temos as regras proposicionais. Na coluna mais à esquerda estão representados os conectivos para os quais iremos definir as regras à direita e as regras à esquerda.

	Esquerda	Direita
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta, A}{\neg A, \Gamma \mapsto \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \mapsto \Delta}{\Gamma \mapsto \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \mapsto \Delta}{A \wedge B, \Gamma \mapsto \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta, A \qquad \Gamma \mapsto \Delta, B}{\Gamma \mapsto \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \mapsto \Delta \qquad B, \Gamma \mapsto \Delta}{A \vee B, \Gamma \mapsto \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta, A, B}{\Gamma \mapsto \Delta, A \vee B}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \mapsto \Delta, A \qquad B, \Gamma \mapsto \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \mapsto \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \mapsto \Delta, B}{\Gamma \mapsto \Delta, A \rightarrow B}$

Tabela: Regras proposicionais.

No cálculo $\mathcal{G}$ de Gentzen, a demonstração de teoremas é feita através de árvore de prova. Consideremos a Definição de árvore 3.2.1. Vejamos a definição do conjunto de árvores de prova, no cálculo de Gentzen. A definição é parecida com a definição apresentada para a dedução natural. Aqui a árvore é etiquetada por sequentes e como não estamos preocupados com as hipóteses tem uma forma mais simples. Vamos usar as mesmas notações e simplificações usadas na dedução natural; vejamos:

Definição 3.3.6. *O conjunto de **árvores de prova** de $\mathcal{G}$ é o menor conjunto de árvores contendo todas as árvores de um só nó etiquetado por um axioma e fechado pelas regras de inferência do sistema no seguinte sentido:*

1) Para qualquer árvore de prova $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma \mapsto \Delta\end{array}$ *e para qualquer regra de inferência com uma única premissa* $\Gamma \mapsto \Delta$ *e conclusão* $\Lambda \mapsto \Theta$*, a árvore* $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma \mapsto \Delta\end{array}}{\Lambda \mapsto \Theta}$ *é uma árvore de prova.*

2) Para quaisquer duas árvores de prova $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma \mapsto \Delta\end{array}, \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \Gamma' \mapsto \Delta'\end{array}$ *e para qualquer regra de inferência com duas premissas* $\Gamma \mapsto \Delta$ *e* $\Gamma' \mapsto \Delta'$ *e conclusão* $\Lambda \mapsto \Theta$*, a árvore* $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma \mapsto \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \Gamma' \mapsto \Delta'\end{array}}{\Lambda \mapsto \Theta}$ *é uma árvore de prova.*

Vejamos quando é que dizemos que um sequente é um teorema no cálculo $\mathcal{G}$ de Gentzen.

Definição 3.3.7. *Um* ***teorema*** *é um sequente* $\Gamma \mapsto \Delta$ *para o qual existe uma árvore de prova com raíz* $\Gamma \mapsto \Delta$ *e escrevemos* $\vdash \Gamma \mapsto \Delta$.

Vejamos dois exemplos de árvores de prova ([5]).

Exemplo 3.3.8. *Exemplos de árvore de prova dos seguintes teoremas no sistema* $\mathcal{G}$ *de Gentzen:*

i) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A, B}{\vdash A, A \to B}\,(\to dir) \qquad A \vdash A}{((A \to B) \to A \vdash A)}\,(\to esq)}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to dir)$$

ii) $\vdash \neg A \to ((B \to A) \to \neg B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A, B \vdash B}{\neg A \vdash B, \neg B}\,(\neg\ dir) \qquad \dfrac{A \vdash \neg B, A}{\neg A, A \vdash \neg B}}{\neg A, B \to A \vdash \neg B}\,(\to esq)}{\neg A \vdash (B \to A) \to \neg B}\,(\to dir)}{\vdash \neg A \to ((B \to A) \to \neg B)}\,(\to dir)$$

O cálculo $\mathcal{G}$ de Gentzen é correcto e completo para a LPC. Começamos por verificar a correcção:

Teorema 3.3.9 (Correcção)**.** *Seja* $\Gamma \mapsto \Delta$ *um sequente.*

$$\textit{Se } \vdash \Gamma \mapsto \Delta \textit{ então } \Gamma \mapsto \Delta \textit{ é válido.}$$

Demonstração. Vamos apenas apresentar uma ideia da demonstração. A prova completa pode ser encontrada em [19]. Se $\vdash \Gamma \mapsto \Delta$ então existe uma árvore de prova $\mathcal{T}$ de $\Gamma \mapsto \Delta$. A demonstração é feita por indução sobre o comprimento n da árvore de prova $\mathcal{T}$.

Se $n = 1$, temos um único nó raíz que é um axioma. E não é difícil verificar que qualquer axioma é um sequente válido.

Se $n > 1$, é suficiente demonstrar que as regras de inferência transmitem a validade das premissas à conclusão, isto é, dada uma regra de inferência se todas as premissas são sequentes válidos então a conclusão também é um sequente válido. □

A seguir enunciamos, sem demonstrar, o teorema da completude do cálculo $\mathcal{G}$ para a LPC. A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [19].

Teorema 3.3.10 (Completude). *Seja* $\Gamma \mapsto \Delta$ *um sequente.*

$$Se\ \Gamma \mapsto \Delta \ \ \text{é válido} \ \ \text{então} \ \vdash \Gamma \mapsto \Delta.$$

No cálculo de sequentes, o corte é a única regra que apaga totalmente uma fórmula e não somente algumas ocorrências (como faz a regra de contracção). Vejamos a seguinte definição:

Definição 3.3.11. *Uma árvore de prova diz-se* ***livre de corte*** *se não ocorre a regra de inferência do corte.*

Nas derivações livres de corte as fórmulas não desaparecem ao longo da derivação o que permite demonstrar a consistência do sistema (existe uma demonstração deste teorema em [9]).

Gentzen desenvolveu este Cálculo sequencial com objectivo principal de demonstrar o seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [9]:

Teorema 3.3.12 (Eliminação de Corte (Hauptsatz)). *Existe um algoritmo que transforma cada árvore de prova em* $\mathcal{G}$*, numa árvore de prova do mesmo sequente, livre de corte.*

O teorema de eliminação de corte garante que qualquer sequente derivável em $\mathcal{G}$, através da regra do corte, pode ser igualmente derivável sem a regra do corte.

Numa dedução de um sequente $\Gamma \mapsto \Delta$ sem a regra do corte, todos os sequentes são compostos apenas por subfórmulas das fórmulas de Γ e Δ.

Então qual é a vantagem da regra do corte?

- Permite deduções mais curtas;
- Torna mais fácil obter resultados teóricos sobre o sistema dedutivo;
- Transforma aplicações da regra noutras com fórmulas de corte mais simples;
- Passa a aplicação da regra para nós superiores da árvore de derivação.

3.4 Cálculo de Smullyan

Nesta secção apresentaremos de uma forma resumida o Cálculo de Smullyan para a Lógica Proposicional Clássica ([44]). O cálculo $\mathcal{T}$ de Smullyan ou sistema de *tableaux* é um método inventado nos anos 50 por E. Beth e J. Hintikka e mais tarde aprofundado pelo matemático americano Raymond Smullyan. Esse método é baseado no seguinte resultado: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é contraditório e, também, no resultado equivalente $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é realizável.

As derivações no cálculo $\mathcal{T}$ de Smullyan são árvores etiquetadas. Adoptamos aqui a mesma nomenclatura utilizada no início de capítulo. Os nós que não têm sucessores directos são chamados **folhas** da árvore. Se n é um nó folha, o conjunto dos nós que são predecessores de n designa-se por **ramo** da árvore. Notemos que cada ramo inclui o nó raiz e uma única folha. Uma diferença relativamente ao caso da dedução natural é que as etiquetas dos nós são conjuntos de fórmulas. Estas árvores chamam-se **tableaux** e constroem-se partindo de uma árvore com um único nó (singular) aplicando sucessivamente certas regras de inferência. Dado um ramo r denotamos por $Form(r)$ o conjunto de fórmulas que pertencem à etiqueta de algum nó de r.

Na tabela que se segue apresentamos as regras de inferência do sistema $\mathcal{T}$ de Smullyan, com os conectivos e as respectivas circunstâncias em que podem ser aplicadas.

$\wedge$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi, \psi}$
$\neg\wedge$	$\dfrac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vert_* \neg\psi}$
$\vee$	$\dfrac{\varphi \vee \psi}{\varphi \vert \psi}$
$\neg\vee$	$\dfrac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \vert \neg\psi}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg\varphi \vert \psi}$
$\neg \rightarrow$	$\dfrac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi \vert \neg\psi}$
$\neg\neg$	$\dfrac{\neg(\neg\varphi)}{\varphi}$

Tabela: Regras de Smullyan.

$|_*$ representa dois nós sucessores directos.

Dado que $\varphi \leftrightarrow \psi \;\equiv\; \varphi \rightarrow \psi \;\wedge\; \psi \rightarrow \varphi$, temos a seguinte regra para o conectivo

$\leftrightarrow$, no sistema $\mathcal{T}$:

$$\neg\leftrightarrow: \frac{\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)}{\varphi, \neg\psi \mid \neg\varphi, \psi} \qquad \leftrightarrow: \frac{(\varphi \leftrightarrow \psi)}{\neg\varphi, \psi \mid \neg\varphi, \neg\psi}$$

A fórmula acima da linha horizontal na representação usada para estas regras estabelece a sintaxe da fórmula que deve estar presente na etiqueta de algum nó folha do *tableau* para se poder aplicar a regra. As fórmulas abaixo da linha horizontal representam as fórmulas que constituem a(s) etiqueta(s) do(s) novo(s) nó(s) acrescentado(s) por aplicação da regra. O símbolo | ocorre nas regras binárias, caso em que são acrescentados a uma folha dois nós sucessores directos: um com etiqueta composta pela fórmula à esquerda do símbolo | e o outro com a fórmula à direita como etiqueta. Nos outros casos trata-se de regras unárias, sendo apenas acrescentado um sucessor directo a uma folha. Se estão presentes duas fórmulas separadas por uma vírgula, a etiqueta do novo nó é constituída por essas duas fórmulas, caso contrário a etiqueta inclui apenas a fórmula indicada.

Quando aplicamos uma regra a um *tableau* t obtemos um novo *tableau*, construído a partir de t acrescentando um ou dois nós sucessores directos a alguma folha de t por aplicação da regra. A regra define o conjunto de fórmulas que pertencem à etiqueta de cada um desses novos nós. Quando se aplicam as regras $\wedge$, $\neg\vee$, $\neg \rightarrow$ *e* $\neg\neg$ é acrescentado apenas um nó sucessor a uma dada folha de t, enquanto nas outras regras são acrescentados dois nós sucessores.

Para aplicarmos uma regra a um *tableau* t tem que na etiqueta de algum nó de t existir uma fórmula com a sintaxe adequada. Por exemplo, para aplicar a regra $\vee$ a t tem de existir em algum nó de t uma fórmula do tipo $\varphi \vee \psi$ e para aplicar a regra $\neg\wedge$ tem de existir uma fórmula do tipo $\neg(\varphi \wedge \psi)$. Depois de determinada a fórmula com a sintaxe adequada e o nó a que pertence, diz-se que a regra de inferência correspondente pode ser aplicada a essa fórmula e é apenas à folha de um ramo r que inclua esse nó que a aplicação da regra permite acrescentar o(s) novo(s) nó(s). Pode também então dizer-se que o novo *tableau* é obtido a partir de t por aplicação da regra de inferência à fórmula em causa, relativamente ao ramo r.

Definição 3.4.1. *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas. Um tableau* para Γ *é um tableau com o nó raiz etiquetado por* Γ.

Vejamos exemplos de árvores de *tableaux* no sistema $\mathcal{T}$ de Smullyan.

Exemplo 3.4.2.

i) Considere-se o conjunto $\Gamma = \{\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3), \psi_1 \wedge \psi_2\}$ e o seguinte tableau.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\psi_1 \qquad \neg\psi_2 \qquad \neg\wedge\,(3)}{\psi_1,\ \ \psi_2 \qquad \wedge\,(2)}}{{}^{(3)}\neg(\psi_1 \wedge \psi_2), \neg\psi_3 \qquad \neg\rightarrow(1)}}{{}^{(1)}\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3), {}^{(2)}\,\psi_1 \wedge \psi_2}$$

Consideremos a árvore com um único nó, que é a raíz, como o primeiro passo na derivação acima. Aplicando a regra $\neg\rightarrow$ à fórmula $\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3)$ obtemos o segundo passo. Acrescentou-se um nó sucessor directo ao único nó raíz. Aplicando a regra $\wedge$ à fórmula $\psi_1 \wedge \psi_2$ obtemos o terceiro passo, acrescentando-se assim, um sucessor directo à folha da árvore anterior. Finalmente aplicamos a regra $\neg\wedge$ à fórmula $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ acrescentamos mais dois nós sucessores directos da folha da árvore anterior. A árvore obtida tem dois ramos.

ii) Em seguida apresentamos um tableau para $\Gamma = \{\neg(\psi_1 \rightarrow (\neg\psi_2)), \psi_1 \vee \neg\psi_2\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1 \qquad \neg\psi_2}{\psi_2} \ \vee\,(3) \quad \neg\neg(3)}{{}^{(3)}\psi_1, \neg(\neg\psi_2) \quad \neg\rightarrow(1)}}{{}^{(1)}\neg(\psi_1 \rightarrow (\neg\psi_2)), {}^{(2)}\,\psi_1 \vee \psi_2}$$

O cálculo $\mathcal{T}$ de Smullyan é um sistema dedutivo que utiliza o método de refutação. Cada ramo t é uma tentativa de construir uma valoração que satisfaça o conjunto Γ.

Vejamos, de forma informal, dois casos particulares da aplicação deste método.

- Para verificar se uma fórmula φ é uma tautologia, podem considerar-se *tableaux* para $\Gamma = \{\neg\varphi\}$. Cada ramo corresponde a uma tentativa de encontrar uma valoração que satisfaça $\neg\varphi$, ou seja, a uma tentativa de refutar φ. Se as tentativas falharem, concluímos que não existe uma tal valoração e portanto φ é uma tautologia.
- No caso de um *tableau* para $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi\}$, cada ramo corresponde a uma tentativa de construir uma valoração que satisfaça $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e não satisfaça φ. Se todas as tentativas falham, não existe um tal valoração e portanto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

Definição 3.4.3. *Um ramo r de um tableau diz-se **fechado** se existe uma fórmula φ tal que φ e $\neg\varphi$ pertencem às etiquetas dos nós de r. Dizemos que um ramo r é **aberto** se não é fechado.*

Exemplo 3.4.4. *O tableau da alínea ii) do Exemplo 3.4.2 o ramo com folha $\neg\psi_2$ é um ramo fechado, enquanto o ramo com folha ψ_1 é aberto.*

Definição 3.4.5. *Dizemos que um tableau é* ***fechado*** *se todos os seus ramos são fechados e dizemos que tableau é* ***aberto*** *se não é fechado.*

Exemplo 3.4.6. *No Exemplo 3.4.2 o tableau da alínea i) é fechado enquanto o tableau da alínea ii) é aberto.*

Quando existir um *tableau* fechado para um conjunto de fórmulas dizemos que esse conjunto é refutado. Vejamos a definição.

Definição 3.4.7. *Um conjunto de fórmulas* Γ *diz-se* ***refutado*** *se existir um tableau fechado para* Γ*. Dizemos que a fórmula* φ *é refutada se o conjunto* $\{\varphi\}$ *é refutado.*

Definição 3.4.8. *Dizemos que uma fórmula* φ *é um* ***teorema*** *no cálculo de Smullyan* $\mathcal{T}$ *e escrevemos* $\vdash_{\mathcal{T}} \varphi$ *se* $\neg\varphi$ *é uma fórmula refutada.*
Dizemos que existe uma derivação da fórmula φ *a partir do conjunto de fórmulas* Γ *no sistema* $\mathcal{T}$*, e escrevemos* $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$*, se* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *é um conjunto refutado.*

Para demonstrar a correcção do sistema $\mathcal{T}$ de Smullyan na LPC, precisamos da seguinte definição.

Definição 3.4.9. *Dizemos que uma regra do sistema* $\mathcal{T}$ *é* ***correcta*** *se verificar a seguinte condição:*
se t *é um tableau com um ramo* r *tal que* $Form(r)$ *é um conjunto realizável, então qualquer* tableau t' *obtido a partir de* t *por aplicação dessa regra tem também um ramo* r' *tal que* $Form(r')$ *é um conjunto realizável.*

Teorema 3.4.10 (Correcção)**.** *Todas as regras de inferência do sistema* $\mathcal{T}$ *são correctas.*

Assim chegamos ao resultado que apresentamos sob a forma da seguinte proposição.

Proposição 3.4.11. *Seja* t *um tableau para* Γ*.*

1) Se Γ *é um conjunto realizável então existe um ramo* r *de* t *tal que* $Form(r)$ *é realizável.*

2) Se t *é fechado então* Γ *não é realizável.*

Demonstração. 1) Como os *tableaux* são construídos por aplicação sucessiva de regras de inferência, a afirmação é consequência da correcção das regras de $\mathcal{T}$.

2) Num *tableau* fechado todos os ramos são fechados. Assim, por (1), se Γ fosse um conjunto realizável, o conjunto de fórmulas de algum ramo de t seria um conjunto

realizável. Mas o conjunto de fórmulas de qualquer ramo fechado é sempre um conjunto não realizável. Consequentemente, Γ é necessariamente um conjunto não realizável. $\square$

Apresentamos, mas não demonstramos, o teorema da completude do cálculo $\mathcal{T}$ de Smullyan para a LPC.

Teorema 3.4.12 (Completude)**.** *Seja* φ *uma fórmula.*

i) $\models \varphi$ *se e só se* $\vdash_{\mathcal{T}} \varphi$*;*

ii) $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$ *se e só se* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$*.*

Ver a demonstração deste teorema em [44].

3.5 Lógica Intuicionista

O nosso objectivo não é estudar a Lógica Intuicionista, mas dar apenas a ideia de que existem lógicas, como a Lógica Intuicionista, que não admitem o princípio do terceiro excluído. Pretendemos também fazer uma pequena comparação com a Lógica Proposicional Clássica.

A posição intuicionista tem certa afinidade com a filosofia de Kant e está ligada a muitos matemáticos como L. Kronecker, H. Poincaré, E. Borel, H. Lebesgue entre outros. Mas foi o matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (27 de Fevereiro, 1881 - 2 de Dezembro, 1966) que fundou o intuicionismo como oposto do formalismo, e que mais tarde, no início do século XX, foi desenvolvida de uma forma sistemática pelo seu aluno, outro matemático holandês, Arend Heyting ([15] e [49]).

Um aspecto importante da Lógica Intuicionista é a sua abordagem construtiva da Matemática: "*aceitamos a existência de um objecto matemático se podemos arranjar um método para a sua construção*". Ou seja, aceitar a existência de um objecto é equivalente à possibilidade da sua construção. A principal característica da Lógica Intuicionista é a rejeição do princípio do terceiro excluído aceite na Lógica Clássica: uma proposição é verdadeira ou é falsa, ou seja, se uma proposição não é verdadeira, tem que ser necessariamente falsa. Só podemos afirmar algo que podemos provar construtivamente. O que implica que a semântica não é dada pelas tabelas de verdade. Os intuicionistas consideram que os objectos matemáticos são construções da mente humana e por isso, o que não podemos construir não pode ser considerado válido. Uma prova por contradição ou redução ao absurdo usa o princípio do terceiro excluído no que necessita de imediata conclusão de que se algo não pode ser falso então tem que ser verdadeiro. Logo, as demonstrações por redução ao absurdo não são aceites nesse cálculo.

Para os intuicionistas a refutação da não existência não implica existência, *per se* a menos que se exiba uma instância daquilo cuja existência se "pretende provar". Isto contrasta com a abordagem clássica que afirma que a existência de um objecto pode ser provada através da negação da sua não-existência. Assim, o axioma $\varphi \to \neg\neg\varphi$ aceite no LPC também é aceite na Lógica Intuicionista. Mas, o axioma aceite no LPC $\neg\neg\varphi \to \varphi$ não é aceite na Lógica Intuicionista. Vamos apresentar um exemplo de uma demonstração não construtiva não aceite pelos intuicionistas. " Existem irracionais a e b tais que a^b é racional."A demonstração usual é a seguinte: Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional a afirmação está demonstrada para $a = b = \sqrt{2}$. Caso contrário, $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ é racional e portanto a afirmação é verdadeira para $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$.

A Lógica Intuicionista admite como conceitos primitivos o conjunto dos números naturais e cada número natural. Todos os outros devem ser construídos a partir desses. Assim, podemos dizer que a linguagem da Lógica Intuicionista consiste num conjunto de símbolos de variáveis proposicionais $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ e num conjunto de símbolos lógicos: $\wedge, \vee, \neg, \to, \forall,\ e\ \exists$.

Sejam x uma variável proposicional e $\xi,\ \varphi\ e\ \psi$ fórmulas. Definimos de maneira informal o valor de uma fórmula ξ da seguinte forma:

- Se $\xi = \varphi \wedge \psi$, dizemos que ξ é uma fórmula demonstrável se tivermos uma construção de prova de φ e uma construção de prova de ψ;

- Se $\xi = \varphi \vee \psi$, dizemos que ξ é uma fórmula demonstrável se tivermos uma construção de prova de φ ou uma construção de prova de ψ;

- Se $\xi = \varphi \to \psi$, dizemos que ξ é uma fórmula demonstrável se tivermos um método que transforma a demonstração de φ na demonstração de ψ;

- Se $\xi = \neg\varphi$, dizemos que ξ é uma fórmula demonstrável se tivermos um método que transforma a demonstração de φ na demonstração de uma contradição ($\perp$);

- Se $\xi = \exists x \varphi(x)$, dizemos que ξ é uma fórmula demonstrável num modelo da Lógica Intuicionista se há um método construtivo para obter um elemento a do domínio de um modelo, tal que $\varphi(a)$ pode ser demonstrado. Na Lógica Clássica, $\exists x \varphi(x)$ é equivalente a $\neg\forall x \neg\varphi(x)$. Na Lógica Intuicionista a fórmula $\exists x \varphi(x)$ tem o seguinte significado: existe um método construtivo que prova que existe pelo menos um elemento a do domínio de um modelo tal que $\varphi(a)$ é demonstrável nesse modelo. Enquanto que a fórmula $\neg\forall x \neg\varphi(x)$ tem o seguinte significado: existe um método construtivo que transforma, para cada elemento a do domínio de um modelo, a construção da prova de $\neg\varphi(a)$ numa contradição;

• Se $\xi = \forall x\varphi(x)$, dizemos que ξ é uma fórmula demonstrável num modelo da Lógica Intuicionista se há um método construtivo para provar $\varphi(a)$, qualquer que seja o elemento a pertencente ao domínio desse modelo.

Neste trabalho iremos apresentar a Lógica Proposicional Intuicionista (LPI) como um Sistema Axiomático. As fórmulas proposicionais são as mesmas da Lógica Proposicional Clássica.

Existe várias apresentações de axiomas da Lógica Proposicional Intuicionista, dependendo dos autores que as produzem, mas mantendo sempre a equivalência entre elas ([35]). A regra modus ponens (MP): $\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ também é aceite nesse cálculo. Sejam φ, ψ e ϕ fórmulas; tomamos como axiomas os seguintes esquemas de axiomas para a Lógica Proposicional Intuicionista ([3]):

1)$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;

2)$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \phi))$;

3)$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$;

4)$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$;

5)$\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$;

6)$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;

7)$\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;

8)$(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \phi))$;

9)$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \wedge \phi))$;

10)$(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

Definimos que uma fórmula é derivável de um conjunto de fórmulas no LPI, de forma análoga ao que foi feito na Lógica Proposicional Clássica (página 16). Isto é, seja Γ um conjunto de fórmulas proposicionais e φ uma fórmula proposicional. A fórmula φ **é derivável de** Γ e escrevemos $\Gamma \vdash_{LPI} \varphi$, se existir uma sequência de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tal que φ_n é φ e para cada $i \leq n$:

i) φ_i é um axioma;

ii) ou $\varphi_i \in \Gamma$;

iii) ou φ_i é obtida de φ_j e φ_k, com j e k $< i$, por MP.

Se $\Gamma = \emptyset$, dizemos que φ é um teorema e escrevemos $\vdash_{LPI} \varphi$.

Os matemáticos Gödel e Gentzen mostraram que pela interpretação dos conectivos clássicos e dos quantificadores podemos "traduzir"a Lógica de Primeira Ordem

(LPO) para a Lógica Intuicionista. Vejamos a definição desta tradução para o caso proposicional:

Definição 3.5.1. *Sejam φ eψ $\in$ **Prop**. Definimos a aplicação $^\circ$: **Prop** $\rightarrow$ **Prop** recursivamente como se segue:*

i) $\perp^\circ = \perp$; $\varphi^\circ = \neg\neg\varphi$, se φ for uma fórmula atómica diferente de $\perp$;

ii) $(\varphi \wedge \psi)^\circ = \varphi^\circ \wedge \psi^\circ$;

iii) $(\varphi \vee \psi)^\circ = \neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ)$;

iv) $(\varphi \rightarrow \psi)^\circ = \varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ$;

A esta aplicação $^\circ$ chamamos **tradução de Gödel**. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Definimos $\Gamma^\circ = \{\varphi^\circ : \ \varphi \in \Gamma\}$.

A relação entre a derivabilidade da Lógica Proposicional Clássica e a derivabilidade da Lógica Proposicional Intuicionista é dada pelos dois seguintes teoremas que não vamos demonstrar (as prova podem encontrar-se em [15]):

Teorema 3.5.2. *Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula.*

$$\Gamma \vdash_{LPC} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^\circ \vdash_{LPI} \varphi^\circ$$

O teorema seguinte é conhecido por **Teorema de Glivenko**.

Teorema 3.5.3 (Teorema de Glivenko)**.** *Seja φ uma fórmula. Então*

$$\vdash_{LPC} \varphi \ \Leftrightarrow \vdash_{LPI} \neg\neg\varphi.$$

Uma outra semelhança da LPI com a LPC é que o teorema de dedução é também aceite na Lógica Intuicionista. Isto é, sejam φ eψ fórmulas e Γ um conjunto de fórmulas então

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{LPI} \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LPI} \varphi \rightarrow \psi.$$

A Lógica Proposicional Intuicionista, para o sistema Axiomático apresentado, é correcto mas não é completo para a semântica das tabelas de verdade.

Existe uma semântica que é uma extensão das tabelas de verdade da Lógica Proposicional Clássica que é mais apropriado. É a semântica das álgebras de Heyting (uma álgebra de Heyting é um reticulado distributivo com elemento mínimo, ver [15] e [11]) e que permite mostrar a completude da Lógica Proposicional Intuicionista. Existe uma outra semântica que utiliza o modelo de Saul Kripke (ver a definição da estrutura de Kripke em [44]); esta é mais apropriada ao método dos *tableaux*. Essas duas noções semânticas são equivalentes. Ou seja, uma fórmula φ é uma tautologia intuicionista na álgebra de Heyting (ver a definição em [15] e [44]) se e só se φ é uma fórmula válida nas estruturas de Kripke. (Para um estudo detalhado desse conteúdo, ver [44] e [3].)

Capítulo 4

Dedução Natural No Ensino Secundário

Uma das grandes dificuldades com que as escolas, nomeadamente as secundárias, se têm debatido nos últimos anos é o grande insucesso na disciplina de Matemática. Parece que os alunos não têm desenvolvido as capacidades indispensáveis para atingir os objectivos do ensino secundário. Como professora fui constatando as dificuldades dos alunos e dos professores de Matemática em lidar com este problema, a grande taxa de insucesso na disciplina de Matemática. Esta preocupação permanente de professora levou-me a interrogar-me sobre a possível utilidade do trabalho desenvolvido nesta dissertação para o combate ao insucesso. Sistemas formais de prova, rigor, demonstração são um pouco contra a corrente dominante. Mesmo assim achei que, tratando-se de um mestrado em ensino de Matemática, valia a pena dedicar um pouco de atenção ao ensino não superior. Optei, pois, por incluir um pequeno capítulo onde apresentarei algumas demonstrações relativas a matérias do ensino secundário, sendo algumas delas retiradas de manuais escolares. O processo de demonstração utilizado é basicamente o da Dedução Natural, embora condensado e sem explicitar todas as fases.

De um modo geral começarei com as demonstrações habituais e farei em seguida uma breve análise das mesmas, apresentando, sempre que oportuno, a prova no sistema de Dedução Natural do modo mais completo possível tendo em conta o contexto.

Ao mesmo tempo que serve de concretização, via exemplos, do essencial do sistema de Dedução Natural desenvolvido de modo formal no capítulo 3, julgo que este capítulo pode ainda ser um instrumento de trabalho para professores do ensino secundário que desejam melhorar as suas capacidades no que respeita à demonstração.

Com este último objectivo específico encontrámos publicações recentes, a saber: "Introdução à Lógica Matemática", Armando Machado, Projecto Gulbenkian REANIMAT, 2002 e "A Linguagem Matemática", Ricardo Bianconi, 2002.
Esperamos que este trabalho nos permita aprofundar e alargar horizontes sobre os sistemas dedutivos, contribuindo para um melhor conhecimento da teoria da prova no nível do ensino referido. Este trabalho também tem uma razão de cariz pessoal, já que senti a necessidade crescente de estar constantemente a aprender. Daí o facto de tentar realizar um trabalho que promove a reflexão pessoal e que irá alterar as minhas práticas pedagógicas.

A Lógica é uma área com características muito próprias. Para estudar a Lógica é necessário uma linguagem formal rigorosa. Como mais à frente precisaremos das regras de introdução e de eliminação de conectivos, fazemos para já uma pequena introdução apresentando o conceito de conectivo, os conectivos básicos e comparando a linguagem lógica formal com a linguagem corrente (linguagem da gramática portuguesa) sem preocupações de carácter formal.

Os conectivos são instrumentos lógicos que utilizamos para construir proposições mais complexas a partir de proposições mais simples. O primeiro conectivo que vamos apresentar é a **negação** que é simbolicamente representado por $\neg$. Sendo p uma proposição a negação da proposição p, $\neg p$, é uma proposição verdadeira se p for uma proposição falsa e falsa se p for verdadeira. Na linguagem corrente este conectivo exprime-se habitualmente por "não". A negação tem uma propriedade muito simples que é chamada **lei da dupla negação**. Isto é, dizer que a negação da negação de uma proposição, $\neg\neg p$, é verdadeira é o mesmo que dizer que a proposição original,p, é verdadeira. A **conjunção** é o conectivo que é simbolicamente representado por $\wedge$. A conjunção de duas proposições p e q, $p \wedge q$, é uma proposição que é verdadeira se e só se as duas proposições p e q o forem. É, pois, claro que se alguma das proposições for falsa então a conjunção destas duas proposições será falsa. Na linguagem corrente este conectivo exprime-se habitualmente por "e". A **disjunção** é o conectivo que é simbolicamente representado por $\vee$. A disjunção de duas proposições p e q, $p \vee q$, é uma proposição que é falsa se e só se as duas proposições p e q o forem. Logo, se alguma das proposições for verdadeira então a disjunção destas duas proposições será verdadeira. Na linguagem corrente este conectivo exprime-se por "ou". A **implicação** é o conectivo que é simbolicamente representado por $\rightarrow$. A implicação entre duas proposições p e q, $p \rightarrow q$, é uma proposição que é falsa se p for verdadeira e q for falsa. A

p chamamos hipótese e a q conclusão. A ideia intuitiva subjacente a uma implicação verdadeira é que se assumimos que a hipótese p é verdadeira então podemos concluir que q é verdadeira. Na linguagem corrente este conectivo exprime-se por "se...então". A **equivalência** é o conectivo que é simbolicamente representado por $\leftrightarrow$. A equivalência entre duas proposições p e q, $p \leftrightarrow q$, é uma proposição que é verdadeira se e só se as duas proposições p e q forem ambas verdadeiras ou ambas falsas. Se uma das proposições for falsa e a outra verdadeira então a equivalência entre as duas é falsa. Na linguagem corrente este conectivo exprime-se habitualmente por "se e somente se". A equivalência pode ser definida pela conjunção de duas implicações, isto é, afirmar que p é equivalente a q é o mesmo que afirmar $p \rightarrow q \ \wedge \ q \rightarrow p$. Por esta razão e para simplificar não iremos introduzir $\leftrightarrow$ como conectivo da nossa linguagem $\mathcal{L}$ para as concretizações em $\mathbb{R}$.

4.1 Exemplos de demonstrações: versão usual, versão DN

Como já foi referido no início do capítulo apresentaremos algumas demonstrações do âmbito do programa do ensino secundário quer na versão usual, quer numa versão DN que será, no nosso entender, o mais completa possível, mas sem ultrapassar o limite da razoabilidade.

Tentaremos explicitar os passos da construção de uma demonstração com os seus subesquemas intermédios e gostaríamos que ficasse claro que o que se apresenta não é um corpo rígido, que há várias abordagens possíveis.

De um modo geral começaremos com um enunciado (referenciado) e a demonstração usual e de seguida apresentaremos uma versão de demonstração no sistema DN (versão DN), terminando, quando oportuno, com alguns comentários.

Na nossa análise iremos utilizar propriedades dos números reais e uma linguagem $\mathcal{L}$ que passamos a apresentar. A linguagem $\mathcal{L}$ é constituída pelos seguintes *símbolos lógicos*:
as variáveis individuais: $x, y, z, a, b, c, n, \cdots$; denotaremos por $\mathcal{V}ar(\mathcal{L})$ o conjunto destas variáveis;
os conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$;
o quantificador universal: $\forall$;

o quantificador existencial: $\exists$;
os símbolos auxiliares: $($, $)$ (semi-parênteses e vírgula) e pelos seguintes *parâmetros*:
os símbolos relacionais: $<, \leq, >, \geq$[1]
as constantes individuais: 0, 1;
os símbolos funcionais $+, -, \times, \div$ adição, subtracção, multiplicação e divisão, respectivamente.

A linguagem permite-nos dizer que expressões são gramaticalmente correctas. Considerando a definição de termos e fórmulas na linguagem de primeira ordem apresentada no capítulo 1 diremos que o conjunto dos termos é o menor conjunto de sequências de símbolos que contêm variáveis e constantes e é fechado para aplicações dos símbolos funcionais; do mesmo modo o conjunto das fórmulas é o menor conjunto de sequências finitas de símbolos que contêm fórmulas atómicas e é fechado para aplicações dos conectivos. De um modo informal podemos dizer que fórmulas são expressões destinadas a declarar "factos"acerca dos indivíduos.

Consideremos a estrutura $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}; +, -, \times, \div, <, \leq, >, \geq, 0, 1 \rangle$ dos números reais adequada à nossa linguagem. Seja f uma função que atribui valores às variáveis de $\mathcal{L}$. Dizemos que f satisfaz uma fórmula numa estrutura se f torna verdadeira a fórmula na referida estrutura.

Exemplo: Seja φ a fórmula $x + y = x \times y$ na estrutura dos números reais. Queremos saber se a fórmula φ é verdadeira ou não nos reais. Só o saberemos se atribuirmos valores às variáveis x e y. Seja

$$\begin{aligned} f_1 : \quad & \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x, y \longmapsto k, \ k = 0, 2 \end{aligned}$$

Como φ é verdadeira para $x = 0, \ y = 0$ e para $x = 2, \ y = 2$, f_1 satisfaz φ. Seja

$$\begin{aligned} f_2 : \quad & \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \ -1 \\ & y \longmapsto \ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como φ é verdadeira para os valores atribuídos, f_2 satisfaz φ. Seja

$$\begin{aligned} f_3 : \quad & \mathcal{V}ar(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \ 1 \\ & y \longmapsto \ 3 \end{aligned}$$

[1]Observe-se que os símbolos funcionais estão representados pelas operações $+, -, \times, \div$ e os símbolos relacionais estão representados pelas relações $<, \leq, >, \geq$.

Para esta atribuição φ não é verdadeira; logo, f_3 não satisfaz φ.

Dizemos que uma estrutura é um **modelo** para um conjunto de fórmulas se qualquer atribuição de valores satisfaz todas as fórmulas desse conjunto na referida estrutura. Se conseguirmos provar que uma fórmula φ é consequência sintáctica de um conjunto de fórmulas, Σ, no sistema de Dedução Natural, isto é, $\Sigma \vdash_{DN} \varphi$ então concluímos, pela completude do sistema de Dedução Natural, que φ é consequência semântica de Σ, isto é, $\Sigma \models_{DN} \varphi$.

Como se sabe $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, arquimediano, denso e completo. Relembremos apenas alguns conjuntos de axiomas de que necessitaremos.

I) **Axiomas para adição e multiplicação.** São os axiomas que induzem em $\mathbb{R}$, munido das operações binárias adição e multiplicação, com os elementos distintos 0 e 1, a estrutura de corpo, isto é, $\forall x, y, z$ tem-se que $x+y = y+x$; $x+(y+z) = (x+y)+z$; $x+0 = x$; $\forall x\ \exists y$ tal que $x+y = 0$, e y é denotado por $-x$ (estes axiomas descrevem o grupo comutativo $(\mathbb{R}, +)$); $\forall x, y, z$ tem-se que $xy = yx$; $x(yz) = (xy)z$; $1x = x$; $\forall x \neq 0\ \exists y$ tal que $xy = 1$, e y é denotado por x^{-1} (estes axiomas descrevem o grupo comutativo $(\mathbb{R}, \times)$); $\forall x, y, z$ tem-se que $x(y+z) = (xy+xz)$(propriedade distributiva).

II) **Axiomas para ordem.** São os axiomas que induzem em $\mathbb{R}$, munido da relação $\leq$, a estrutura de corpo totalmente ordenado. A ordem dos números reais é compatível com a adição e a multiplicação: $\forall x, y, z$ se $x < y$ então $x + z < y + z$; se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$; $\forall x$ apenas uma das condições se verifica: ou $x < 0$, ou $x = 0$, ou $x > 0$; se $x < 0$ então $-x > 0$.

Relembremos o significado de algumas destas expressões.

Para $\mathbb{R}$, corpo ordenado, temos $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, onde $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}^- = -(\mathbb{R}^+)$ é o conjunto dos números reais negativos, isto é, $\mathbb{R}^- = \{-x, x \in \mathbb{R}^+\}$; $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\{0\}$, são dois a dois disjuntos. É ainda sabido que:

1. $\mathbb{R}^+$ é fechado para a adição e para a multiplicação, isto é, para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $xy \in \mathbb{R}^+$;

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se apenas uma das seguintes ocorrências: $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$ (equivale a $x \in \mathbb{R}^-$) ou $x \in \{0\}$ (escreve-se habitualmente $x = 0$).

No corpo ordenado $\mathbb{R}$, escrevemos $x < y$ para significar que $y - x \in \mathbb{R}^+$. Em particular, $x > 0$ significa que $x - 0 \in \mathbb{R}^+$ ou seja, $x \in \mathbb{R}^+$. Do mesmo modo $x < 0$ significa $0 - x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$ ou ainda $x \in \mathbb{R}^-$.

III) **Propriedade do supremo.** Esta propriedade induz no corpo ordenado $\mathbb{R}$ a estrutura de corpo completo: Todo o subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente admite supremo em $\mathbb{R}$ e todo o subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente admite ínfimo em $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ é, pois, um corpo ordenado completo. Em $\mathbb{R}$ as seguintes afirmações são válidas e qualquer delas traduz que $\mathbb{R}$ é arquimediano[2]:

1) O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, não é limitado superiormente;

2) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} : na > b$;

3) $\forall a > 0, a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < a$.

Prova-se que as afirmações 1), 2) e 3) são equivalentes ([33]).

Tendo em conta que o leitor deve estar familiarizado com as propriedades dos números reais algumas propriedades foram omitidas porque não serão usadas nos exemplos que iremos analisar. Se necessário, serão enunciadas mais tarde no momento adequado.

O facto de dizermos que o único modelo dos números reais é $\mathbb{R}$ advem de um resultado conhecido que recordamos: a menos de um isomorfismo existe apenas um corpo ordenado completo. Isto garante que a descrição dos números reais pelos axiomas referidos não é ambígua. Os axiomas de I e II podem ser escritos na nossa linguagem descrita acima, mas a propriedade do supremo não pode ser escrito nessa linguagem. Teríamos que recorrer à linguagem da Lógica de Segunda Ordem que é uma extensão da linguagem da Lógica de Primeira Ordem onde se permite a quantificação das relações e das funções de uma estrutura. No entanto, a Lógica de Segunda Ordem está fora do âmbito do nosso estudo.

Os resultados matemáticos são normalmente da seguinte forma: admitimos a validade de uma ou várias hipóteses e chegamos a uma conclusão válida. É o que habitualmente se chama **Teorema**. Para que um teorema seja válido há que o provar ou demonstrar. A demonstração pode ser feita de várias formas. Indicamos algumas das formas que utilizamos durante o nosso estudo.

• **Prova directa**: partindo de uma hipótese ou de um conjunto de hipóteses, de axiomas e resultados anteriores válidos constrói-se proposições intermediários até se chegar à conclusão final, que é a tese do teorema.

• **Prova do contra-recíproco**. Para provar por exemplo que $\varphi \to \psi$ provamos

[2]Ser arquimediano pode deduzir-se de ser corpo ordenado completo [33].

que $\neg\psi \to \neg\varphi$. Com efeito, $\varphi \to \psi$ é logicamente equivalente a $\neg\psi \to \neg\varphi$. Isto é, afirmar que $\varphi \to \psi$ é o mesmo que afirmar que $\neg\psi \to \neg\varphi$.

• **Regra de redução ao absurdo**. Neste tipo de prova usa-se a regra de introdução da $\neg$ do sistema de Dedução Natural, isto é,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\neg\varphi}$$

Temos um exemplo clássico deste tipo de demonstração. Queremos mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{2}$ é racional. Então existem p e q tal que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, com p e q primos entre si, isto é, um deles é ímpar. Então $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$. E $p^2 = 2q^2$. Então p^2 é par e p também é par. Logo é da forma $p = 2k$ para algum inteiro k, donde $p^2 = 4k^2$ e $2q^2 = 4k^2$. Ou seja, $q^2 = 2k^2$, donde q^2 é par, e por conseguinte q é par. Temos então uma contradição. Logo a suposição $\sqrt{2}$ é racional é falsa. Donde a conclusão $\sqrt{2}$ é irracional.

• **Princípio da indução**. Este princípio diz-nos o seguinte:
Seja $P(n)$ uma condição com uma variável $n \in \mathbb{N}$ tal que

i) $P(1)$ verifica-se (**condição básica**);

ii) sempre que se verifica a condição $P(k)$, $k \in \mathbb{N}$ (**hipótese de indução**), então também se verifica a condição $P(k+1)$.

Então $P(n)$ verifica-se para todo o $n \in \mathbb{N}$.

É importante destacarmos que a Indução Matemática é constituída de duas propriedades, cada uma de considerável importância, pois a primeira garante que estamos partindo de um facto verdadeiro para um número natural p, a segunda garante que se a afirmação é verdadeira para um natural $k > p$ qualquer e implica que a propriedade é verdadeira para o seu sucessor $k + 1$, então é verdadeira para todo natural n.

4.1.1 Algumas propriedades dos números reais

Exemplo 4.1.1. *Uma prova por transitividade* ([37], p.49)
Utilizar as leis comutativa e associativa da multiplicação em $\mathbb{R}$ para provar que

$$(ab)(cd) = [(dc)a]b \qquad (i)$$

para todos os números reais a, b, c, d.

Trata-se de um simples exercício sobre números reais.

Demonstração. Sendo a, b, c, d números reais

$(ab)(cd) = (ab)(dc)$	pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$ $cd = dc$ e ainda $((x = y)) \to (ux = uy),\ u \in \mathbb{R}$
$= (dc)(ab)$	pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$
$= [(dc)a]b$	pela associatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$ aplicada aos reais $(dc), a, b$

□

A prova é clara, mas não terá interesse mostrar a necessidade de uma prova?

É sabido como é vulgar ouvir alunos dizerem que não entendem para que serve demonstrar uma coisa óbvia: basta substituir a, b, c, d por números.

Julgamos, pois, útil começar por propor que a prova se faça para um caso particular, por exemplo, tomando como domínio de interpretação $\mathcal{D} = \{1, 2\}$. É fácil nesta situação mostrar que a validade de

$$\forall a, b, c, d \in \mathcal{D} \quad (ab)(cd) = [(dc)a]b$$

só ficava provada após a verificação de cada caso de atribuição dos valores 1 e 2 às variáveis a, b, c, d, num total de dezasseis casos. E isto para um domínio de interpretação com dois elementos. Para um domínio infinito, tal procedimento de verificação é impossível. É o que sucede quando se pretende provar uma fórmula envolvendo um quantificador universal, mas onde não intervêm $\neg, \exists, \to$. É a altura de referir que a prova pode mesmo ser feita. Utilizaremos neste caso um processo de **prova directa**.

Passemos agora a uma prova de (i), versão DN.

Prova (DN). É claro que além das propriedades expressas no enunciado e que tomaremos como hipóteses, temos que ter presentes outros conhecimentos básicos sobre os números reais.

1	a, b, c, d são números reais quaisquer	h_1
2	a multiplicação em $\mathbb{R}$ é uma operação interna, isto é, $\forall a, b \in \mathbb{R}\ ab \in \mathbb{R}$	h_2
3	a multiplicação em $\mathbb{R}$ é comutativa, isto é, $\forall a, b \in \mathbb{R}\ ab = ba$	h_3
4	a multiplicação em $\mathbb{R}$ é associativa, isto é, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (ab)c = a(bc)$	h_4
5	$\forall x \in \mathbb{R}\ x = x$ (reflexiv.“=”)	hip aberta h_5^A
6	$(ab)(cd) = (ab)(cd)$	2.,5.
7	$cd = dc$	h_2, h_3
8	$\forall x, y, z\ (x = y) \to (zx = zy)$	h_6^A (propried.reais)
9	$(ab)(cd) = (ab)(dc)$	$h_2, 7., h_6^A$ (*com* $x = cd$, $y = dc, z = ab$) e elimin.$\to$
10	$(ab)(dc) = (dc)(ab)$	h_2, h_3
11	$(dc)(ab) = [(dc)a]b$	h_2, h_4 (ass. entre $(dc), a, b$)
12	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ [(x = y) \wedge (y = z)] \to x = z$	h_7^A (axioma de “=”)
13	$(ab)(cd) = [(dc)a]b$	9-11, 12. e elimin.$\to$

$\square$

Nota: Em 5. e 8. as regras são primitivas em qualquer linguagem.

Exemplo 4.1.2. (Método do contra-exemplo [37], p.51). *Método de redução ao absurdo.*

Provar que a subtracção dos números reais não é associativa.

Demonstração. É necessário demonstrar que

$$a - (b - c) = (a - b) - c \quad (ii)$$

é falsa.

Para demonstrar que (ii) é falsa é suficiente apresentar-se um contra-exemplo.

Para $a = 7, b = 4$ e $c = 2$ temos

$$a - (b - c) = 7 - (4 - 2) = 7 - 2 = 5$$

enquanto que

$$(a - b) - c = (7 - 4) - 2 = 3 - 2 = 1$$

Como $5 \neq 1$, a igualdade é falsa. $\square$

Este é um exemplo onde o tratamento DN não acrescentaria nada de relevante.

Realçar, no entanto, a noção de contra-exemplo. Note-se que (ii) é verdadeira para uma infinidade de valores (por ex., a, b quaisquer e $c = 0$) mas não o é para *todos*.

Faremos agora a prova da propriedade de não associatividade da subtracção pelo **método de redução ao absurdo**.

Pretende-se demonstrar que não é verdade que a igualdade

$$a - (b - c) = (a - b) - c \qquad (ii)$$

se verifique para todos os valores a, b, c de $\mathbb{R}$. De modo equivalente podemos dizer que se pretende mostrar que existe pelo menos um terno de valores a_0, b_0, c_0 de a, b, c respectivamente, tal que a proposição

$$a_0 - (b_0 - c_0) = (a_0 - b_0) - c_0 \qquad (iii)$$

é falsa.

A cadeia argumentativa começa com uma hipótese auxiliar que é considerar verdadeira a negação do que se pretende provar. Neste caso assumiremos que a subtracção de reais é associativa.

1	$a-(b-c)=(a-b)-c$ para todos os $a,b,c \in \mathbb{R}$	h_1
2	$a=1$, $b=2$, $c=3$ uma concretização de a,b,c	h_2^A
3	$1-(2-3)=(1-2)-3$	1. e 2.
4	$1-(2-3)=2;\ (1-2)-3=-4$	3.
5	$2=-4$	3., 4., propos. falsa
6	$[1-(2-3)=(1-2)-3]\ \wedge\ [2=-4]$	introd.$\wedge$, contradição
7	$\neg h_1$, i.e., $\exists a,b,c \quad a-(b-c)=(a-b)-c$ é falsa	1-6

Logo, a subtracção dos reais não é associativa.

Exemplo 4.1.3. *Transitividade da relação $<$ em $\mathbb{R}$, isto é,*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad a<b \ \wedge\ b<c \ \rightarrow\ a<c \quad (iv)$$

Demonstração. Vejamos a prova no sistema DN

1.	a,b,c números reais quaisquer	hip.1
2.	$a<b \wedge b<c$,	hip.2
3.	$a<b$,	2 e elim de $\wedge$
4.	$b<c$,	2 e elim de $\wedge$
5.	$b-a \in \mathbb{R}^+$,	3 e def de $a<b$
6.	$c-b \in \mathbb{R}^+$,	4 e def de $b<c$
7.	$b-a=b+(-a)$	def.“-”entre b e a
8.	$c-b=c+(-b)$	def.“-”entre c e b

9.	$b + (-a) \in \mathbb{R}^+$	5. e 7.
10.	$c + (-b) \in \mathbb{R}^+$	6. e 8.
11.	$(b + (-a)) + (c + (-b)) \in \mathbb{R}^+$	9., 10. e prop. $\mathbb{R}^+$
12.	$c + (-b) = (-b) + c$	$(\mathbb{R}, +)$ é comutativo
13.	$(-b) + c \in \mathbb{R}^+$	8. e 12.
14.	$(b + (-a)) + ((-b) + c) \in \mathbb{R}^+$	9., 13.
15.	$(b + (-a)) + ((-b) + c) = b + (-a) + (-b) + c$	assoc.adição n$^{\text{o}}$s reais
16.	$b + (-a) + (-b) + c = (b + (-b)) + (c + (-a))$	comutat., assoc.“+”em $\mathbb{R}$
17.	$(b + (-b)) + (c + (-a)) = 0 + (c + (-a)) = c + (-a)$	0 el. neutro de $(\mathbb{R}, +)$
18.	$c + (-a) \in \mathbb{R}^+$	14. e transit.“=”reais
19.	$c - a \in \mathbb{R}^+$	18. e def.“n$^{\text{o}}$s reais”
20.	$a < c$	19. e def. $a < c$
21.	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a < b \wedge b < c \ \rightarrow\ a < c$	1. - 20. e introd.$\rightarrow$

$\square$

Que se ganhou relativamente à prova usual? Maior explicitação dos passos do raciocínio contrariando a mecanização sem compreensão.

Valor absoluto de um número real

$$\textit{Propriedade}:\ x, a \in \mathbb{R};\ a > 0 \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

Definição de valor absoluto de um número real ([52], p.57) (*)

$$x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

A definição diz-nos que dado um número real x ou x e $-x$ são ambos iguais a zero ou um deles é positivo e o outro negativo. O maior dos elementos x e $-x$, isto é, aquele que não for negativo é $|x|$.

Tendo isto em consideração, $|x|$ pode definir-se do seguinte modo:

$$|x| = max\{x, -x\}$$

(*) *Isto vale para um corpo ordenado completo qualquer.*

Vejamos a demonstração da propriedade anterior:

Demonstração. Faremos esta demonstração provando duas implicações; comecemos por provar a implicação:

$$|x| < a \rightarrow -a < x < a.$$

Se $|x| < a$ e $x > 0$ então $|x| = x$ e consequentemente $x < a$. Logo $-a < x < a$. Se $|x| < a$ e $x < 0$ então $|x| = -x$ e consequentemente $-x < a \;\leftrightarrow -a < x$. Logo $-a < x < a$. Em qualquer dos casos temos $|x| < a \rightarrow -a < x < a$.

Provemos a implicação recíproca:

$$-a < x < a \rightarrow |x| < a.$$

Se $-a < x < a$ e $x > 0$ então $|x| = x$ e consequentemente $|x| < a$. Se $-a < x < a$ e $x < 0$ então $|x| = -x \;\leftrightarrow -|x| = x$ e consequentemente $-a < -|x|$. Logo $|x| < a$. Em qualquer dos casos $-a < x < a \rightarrow |x| < a$.

Assim, provámos a equivalência $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a, \; \forall x \in \mathbb{R}$. □

Demonstração. ([Prova [DN]]) Como já referimos no sistema DN não consideramos o conectivo $\leftrightarrow$ (equivalência). Na linguagem considerada afirmar que p é equivalente a q é o mesmo que afirmar que $p \rightarrow q \;\wedge q \rightarrow p$.

Provar $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$ é o mesmo que provar que

$$(|x| < a \rightarrow -a < x < a) \;\wedge\; (-a < x < a \rightarrow |x| < a)$$

e é o que podemos fazer na linguagem $\mathcal{L}$ adoptada.

Nota: Lembramos que $-a < x < a$ é um modo condensado de escrever

$$x < a \ \wedge \ x > -a.$$

(i) Prova de $|x| < a \to -a < x < a$.

1.	$x, a \in \mathbb{R};\ a > 0$	(h_1)
2.	$\lvert x\rvert < a$	(h_2)
3.	$x > 0$	(h_3)
4.	$x < a$	2,3 e def. de $\lvert x\rvert$
5.	$x < 0$	(h_4)
6.	$-x < a$	2,5 e def. de $\lvert x\rvert$
7.	$x > -a$	propr. da rel. $<$ ($-x < a$ é o mesmo que $x > -a$)
8.	$x < a \ \wedge \ x > -a$	4,7 e intr. $\wedge$
9.	$-a < x < a$	outro modo de escrever 8. (ver Nota)
10.	$x, a \in \mathbb{R}, a > 0 \quad \lvert x\rvert < a \to -a < x < a$	1-9 e intr. $\to$

(ii) Prova de $-a < x < a \to |x| < a$.

1.	$x, a \in \mathbb{R};\ a > 0$	(h_1)
2.	$-a < x < a$	(h_2)
3.	$x < a\ \wedge\ x > -a$	outro modo de escrever 2. (ver Nota)
4.	$x < a$	3. e elim. de $\wedge$
5.	$x > -a$	3. e elim. de $\wedge$
6.	$x > 0$	(h_3)
7.	$x = \|x\|$	6. e def. de $\|x\|$
8.	$\|x\| < a$	7.,4.
9.	$x < 0$	(h_4)
10.	$-x = \|x\|$	9. e def. de $\|x\|$
11.	$-x < a$	5. e prop. rel. $<$ (visto em (i))
12.	$\|x\| < a$	10., 11.
13.	$x, a \in \mathbb{R};\ a > 0 \quad -a < x < a \to \|x\| < a$	1-12 e intr. de $\to$

□

Conclusão: Para $x, a \in \mathbb{R};\ a > 0$ tem-se $(|x| < a \to -a < x < a)\ \wedge\ (-a < x < a \to |x| < a)$ 10.(i), 13.(ii) e intr. de $\wedge$ o que prova o pretendido.

Esta apresentação obriga a justificar cada passo e pode evitar a escrita automática de cadeias de $\leftrightarrow$ mesmo quando deixam de ser válidas (o que não acontece nesta situação).

4.1.2 Diferenciabilidade e Continuidade

Teorema 4.1.4. ([52], p.200/205) *Seja f uma função real de variável real. Se f admite derivada finita num ponto interior*[3] *a do seu domínio, então f é contínua em a.*

Admitindo que o leitor conhece a definição de continuidade, derivada finita num ponto e limite de uma função real de variável real, vejamos a demonstração habitual:

Por hipótese existe $f'(a)$ e é finita. Pretendemos provar que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),\ x \neq a,$$

[3] *Consideramos, como é habitual, $a \in intD_f$. No entanto podia-se tomar para a um ponto de acumulação de D_f pertencente a D_f, isto é, $a \in D_f \cap D'_f$. $a \in intD_f$ é um caso particular desta situação.*

isto é, que $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$. Com efeito $f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$ e passando ao limite tem-se
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim\limits_{x\to a}[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim\limits_{x\to a}(x-a)=f'(a).0=0.$

Antes de apresentar a demonstração deste teorema com uma maior explicitação dos vários passos vejamos que o recíproco deste teorema não é verdadeiro. Com efeito há funções contínuas num ponto que não têm derivada finita nesse ponto ou que nem sequer têm derivada nesse ponto. Aqui utilizamos a demonstração pela apresentação de um contra-exemplo:
Seja $f=|x|$. A função f é contínua no ponto 0, mas não admite derivada neste ponto.
Seja $g=\sqrt[3]{x}$. A função g é contínua no ponto 0, mas tem derivada infinita nesse ponto.

Vejamos a prova do teorema anterior, versão DN:

1.	f é uma função real de variável real de domínio D	(h_1)
2.	$a \in intD$	(h_2)
3.	$f'(a)$ existe e é finita	(h_3)
4.	$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	3. e def. de $f'(a)$
5.	$f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a),\ x\neq a$	prop. núm. reais
6.	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}[f(x)-f(a)]=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a)]$	5. e prop. limites de funções
7.	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim\limits_{x\to a}[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}].\lim\limits_{x\to a}(x-a)$	6 e prop. limite de funções
8.	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=f'(a).0$	7.,4. e prop. limites de funções
9.	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$	8.,3. e prop. núm. reais
10.	f é contínua em a	9. def. cont. em a

11. $f:\ D \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in intD$
    $f'(a)$ existe e é finita $\rightarrow$ f é contínua em a 1-10 e intr. $\rightarrow$

O ganho nesta reorganização é pequeno, limitamo-nos a uma explicitação dos vários passos e a uma justificação mais pormenorizada.

Teorema 4.1.5. ([52], p.199) *Se f é uma função definida no intervalo fechado $[a,b]$ e tem um máximo local num ponto $x_0 \in (a,b)$ então verifica-se que:*

a) existindo derivada em x_0 é $f'(x_0) = 0$ (teorema de Fermat).

b) não existindo derivada em x_0, mas existindo derivadas laterais, elas são de sinais contrários, isto é, $f'_e(x_0).f'_d(x_0) < 0$.

Demonstração. a) Pela definição de máximo local, existe uma vizinhança ϵ de x_0 onde se verifica a desigualdade $f(x) \leq f(x_0)$, ou seja, $\forall x \in]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[,\ f(x)-f(x_0) \leq 0$. Nesse caso, tem-se

$$x \in]x_0-\epsilon, x_0[\Rightarrow x-x_0 < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0, logo \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_e(x_0) \geq 0.$$

$$x \in]x_0, x_0+\epsilon[\Rightarrow x-x_0 > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0, logo \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) \leq 0$$

podendo garantir-se a existência das derivadas laterais em x_0 pelo facto de se saber que existe derivada de f nesse ponto. Mas as derivadas laterais terão de ser iguais, pelo que apenas é possível ter se $f'(x_0) = 0$.

b) Pela definição de máximo local, existe uma vizinhança ϵ de x_0 onde se verifica a desigualdade $f(x) \leq f(x_0)$, ou seja, $\forall x \in]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[,\ f(x)-f(x_0) \leq 0$. Nesse caso, tem-se

$$x \in]x_0-\epsilon, x_0[\Rightarrow x-x_0 < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, logo \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_e(x_0) > 0.$$

$$x \in]x_0, x_0+\epsilon[\Rightarrow x-x_0 > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0, logo \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) < 0.$$

Dado que $f'_e(x_0) > 0$ e $f'_d(x_0) < 0$ então $f'_e(x_0).f'_d(x_0) < 0$. Isto é, existindo as derivadas laterais em x_0, elas são de sinais contrários. □

Vejamos a demonstração versão DN:

a) Supõe-se conhecida a definição de *máximo local* de f em x_0

1. $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R};\ x_0 \in]a,b[$ (h_1)

2. f tem um max. local em x_0 (h_2)

3. $\exists f'(x_0)$ (h_3)

4.	$\exists f'_e(x_0) \ \wedge \ \exists f'_d(x_0) \ \wedge \ \ f'_e(x_0) = f'_d(x_0)$	3. e cond. n. e suf. $\exists f'(x_0)$
5.	$\exists f'_e(x_0)$	4. e elim. de $\wedge$
6.	$\exists f'_d(x_0)$	4. e elim. de $\wedge$
7.	$f'_e(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$	4. e elim. de $\wedge$
8.	$\exists \lim\limits_{h\to 0}(\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}),\ h>0,\ x_0-h \in \surd_\delta(x_0)$	5. e def. de $f'_e(x_0)$
9.	$\exists \lim\limits_{h\to 0}(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}),\ h>0,\ x_0-h \in \surd_\delta(x_0)$	6. e def. de $f'_e(x_0)$
10.	$\forall x \in \surd_\delta(x_0)\ f(x) \leq f(x_0)$	2. e def.max. (local)
11.	$f(x_0-h)-f(x_0) \leq 0$	10.
12.	$f(x_0+h)-f(x_0) \leq 0$	10.
13.	$(\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}) \geq 0$	11., (hip. de $h>0$) e prop. nºs reais
14.	$(\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}) \leq 0$	12., (hip. de $h>0$) e prop. nºs reais
15.	$f'_e(x_0) \geq 0$ em $\surd_\delta(x_0)$	13., 8. e prop. limites
16.	$f'_d(x_0) \leq 0$ em $\surd_\delta(x_0)$	14., 9. e prop. limites
17.	$f'_e(x_0) \geq 0 \ \wedge \ f'_d(x_0) \leq 0$	15., 16. e intr. $\wedge$
18.	$f'_e(x_0) = f'_d(x_0)$	7.,17.
19.	$f'(x_0) = 0$	18., 4. (cond. nec. e suf. de ex. $f'(x_0)$)

b)

1.	$f : [a, b] \to \mathbb{R};\ x_0 \in]a, b[$	(h_1)
2.	f tem um max. local em x_0	(h_2)
3.	$\neg\exists f'(x_0)$	(h_3)
4.	$\exists f'_e(x_0)$	(h_4)
5.	$\exists f'_d(x_0)$	(h_5)
6.	$f'_e(x_0) \neq f'_d(x_0)$	3. e (cond. n. e suf. $\exists f'(x_0)$)
7.	$f'_e(x_0) \geq 0$	4. e $8_{a)}, 10_{a)} 11_{a)}, 13_{a)}, 15_{a)}$
8.	$f'_d(x_0) \leq 0$	5. e $9_{a)}, 12_{a)}, 14_{a)}, 16_{a)}$
9.	$f'_e(x_0) > 0$	6.,7.
10.	$f'_d(x_0) < 0$	6.,8.
11.	$f'_e(x_0).f'_d(x_0) < 0$	9.,10. e prop. nºs reais
12.	$[\neg\exists f'(x_0)\ \wedge\ \exists f'_e(x_0)\ \wedge\ f'_d(x_0)] \to f'_e(x_0).f'_d(x_0)\ < 0$ (isto é, $f'_e(x_0)$ *e* $f'_d(x_0)$ têm sinais contrários)	1-11 e introd. $\to$

Vejamos ainda o **Teorema de Rolle**

Teorema 4.1.6 (de Rolle). *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe um ponto c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. (usual)

Sendo f contínua em $[a, b]$ atinge neste intervalo o seu máximo M e o seu mínimo m (Teorema de Weierstrass para funções contínuas).

Se for $M = m$ a função é constante e tem-se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$ o que prova o teorema.
Se $M > m$, então pelo menos um destes valores é atingido num ponto c de $]a, b[$ (o outro pode ser atingido num dos extremos, mas não ambos por ser $f(a) = f(b)$). Como f é diferenciável em c, o Teorema de Fermat diz-nos que $f'(c) = 0$ e o teorema fica provado. □

Esta demonstração é simples e de fácil compreensão. Apresentaremos agora a demonstração do Teorema de Rolle no sistema DN e veremos se isto corresponde ou não a alguma melhoria.

Para demonstrarmos o Teorema de Rolle necessitamos de ter presentes os conceitos de continuidade, diferenciabilidade, máximo e mínimo de uma função, alguns resultados sobre derivadas de funções e ainda os teoremas de Weierstrass (TW) para funções contínuas e o Teorema de Fermat (TF)(p.90).

Consideraremos o teorema com a seguinte formulação

Teorema de Rolle: Se f é contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ e se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$: $f'(c) = 0$.

Demonstração. (Versão DN)

1.	f é contínua em $[a, b]$, intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$ (com $a < b$	(h_1)
2.	f é diferenciável em $]a, b[$	(h_2)
3.	$f(a) = f(b) = k$	(h_3)
4.	$(T.W)$ Se f é contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, então f atinge nesse intervalo o seu máximo, M, e o seu mínimo, m (absolutos).	Resultado conhecido
5.	f tem em $[a, b]$ o seu máximo M e o seu mínimo m.	T.W., 1. e elim.→
6.	$M = m \ \vee \ M > m$	5. e prop. dos nºs reais

(*)[4]

[4] h_i^A: hipótese aberta

Caso 1:

7.	$M = m$	6. e $h_4^A(*)$
8.	f constante em $[a, b]$	7. e def. max. e min.
9.	A derivada de uma função constante é zero	prop.derivada de uma função
10.	$f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$	9.,2.,8. e elim. $\rightarrow$
11.	$\exists c \in]a, b[\ f'(c) = 0$	10. e introd.$\exists$
12.	$f\ cont.[a, b] \wedge f dif.]a, b[\wedge f(a) = f(b) \wedge M = m \quad \rightarrow$ $\rightarrow \quad \exists c \in]a, b[\ f'(c) = 0$	1.-11. e introd.$\rightarrow$

Caso 2:

7'.	$M > m$	6. e h_5^A
8'.	f não é constante em $[a, b]$	7'.
9'.	$\exists x \in]a, b[: \quad f(x) > k\ \vee\ f(x) < k$	8'. e 3.

Subcaso 2-A:

10'.	$f(x) > k$ em algum ponto de $]a, b[$	9'. e h_6^A
11'.	M é atingido num ponto $c \in]a, b[$	5.,7'.,10'.
12'.	(TF) Se f tem um máximo em $c \in]a, b[$ e se existe $f'(c)$, então $f'(c) = 0$	(pg.90)
13'.	$\exists f'(c)$	2. e introd. $\exists$
14'.	M é atingido num ponto $c \in]a, b[\ \wedge \exists f'(c)$	11'.,13'. e introd.$\wedge$
15'.	$f'(c) = 0$	12'., 14'. e elim.$\rightarrow$
16'.	$f\ cont.[a, b] \wedge f dif.]a, b[\wedge f(a) = f(b) \wedge M > m \ \wedge$ $\wedge \exists x \in]a, b[: f(x) > k \ \rightarrow \exists c \in]a, b[\ f'(c) = 0$	1.-6., 7'.-15'. e introd.$\rightarrow$

Subcaso 2-B:

10".	$f(x) < k$ em algum ponto de $]a,b[$	9'. e h_7^A
11".	m é atingido num ponto $c \in]a,b[$	5.,7'.,10".
12".	(TF) Se f tem um mínimo em $c \in]a,b[$ e se existe $f'(c)$, então $f'(c) = 0$	(pg.90)
13".	$\exists f'(c)$	2. e introd. $\exists$
14".	m é atingido num ponto $c \in]a,b[\wedge \exists f'(c)$	11".,13". e introd.$\wedge$
15".	$f'(c) = 0$	12"., 14". e elim.$\rightarrow$
16".	$f\ cont.[a,b] \wedge f dif.]a,b[\wedge f(a) = f(b) \wedge M > m\ \wedge$ $\wedge \exists x \in]a,b[: f(x) < k\ \rightarrow \exists c \in]a,b[\ f'(c) = 0$	1.-6., 7'.-9'., 10'.-15'. e introd.$\rightarrow$

$\square$

O teorema ficou provado em todos os casos possíveis. Podia ter-se omitido o subcaso 2-A: neste caso provou-se o resultado para um máximo e no subcaso 2-B para um mínimo. Ora o teorema de Fermat, neste capítulo apresentado para um máximo, vale para a existência de um extremo em $c \in]a,b[$.

O esquema seguido é o de uma demonstração por casos.

1.
2.
3.
4.
5.
6. $A \vee B$

<table>
<tr><td>

Caso 1

7. A

11.

12.

</td><td>

Caso 2

7'. B

9'. $C \vee D$

<table>
<tr><td>

Subcaso 2-A

10'. C

15'.

16'.

</td><td>

Subcaso 2-B

D 10".

15".

16".

</td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

Pode parecer um pouco rebarvativo, mas, pelo menos ao nível do professor, obriga a não deixar passar qualquer passo por esclarecer. Mais importante ainda é o permitir distinguir o que é essencial na argumentação.

Na situação $A \vee B$ ambos os casos devem ser tratados de modo exaustivo. Em $C \vee D$ basta tratar um deles, pois, como já referimos, o teorema de Fermat vale para um extremo, seja ele máximo ou mínimo, pelo que o procedimento é, "mutatis mutandi", o mesmo. De facto o que se utilizou foi a regra da eliminação da disjunção (Tabela 3.3.1, pg. 22).

Observação: Poderíamos ter adoptado outra formulação, a saber:
Seja f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se (hipótese adicional) $f(a) = f(b)$ então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Agora a conclusão é uma implicação. Temos de facto um esquema do tipo

$$(x \to y) \to (z \to w)$$

o que leva a pequenas alterações formais. O que na primeira formulação era uma hipótese (h_3) passou a uma hipótese aberta (h_3^A).

Capítulo 5

Conclusão

Um dos nossos objectivos foi o de apresentar a Lógica Proposicional Clássica e a Lógica de Primeira Ordem através do sistema de Dedução Natural. Mencionamos e analisamos alguns sistemas dedutivos, nomeadamente o sistema de Dedução Natural, para a Lógica Proposicional Clássica e para a Lógica de Primeira Ordem. Neste sentido, apresentamos as regras de inferência do sistema de Dedução Natural acompanhada da explicação pormenorizada de cada uma das regras, de forma a poder perceber-se como se constrói uma prova neste sistema.

No sistema de Dedução Natural que apresentamos existem duas regras para cada conectivo: regra de introdução e regra de eliminação. Uma outra característica do sistema de Dedução Natural é que as regras de inferência são "naturais"ou intuitivamente aceites. Como afirmou um dos inventores do sistema de Dedução Natural, Gentzen: "O nosso objectivo é construir uma estrutura formal que reflecte e aproxima, o máximo possível, o actual raciocínio lógico envolvido nas provas matemáticas".

Um outro objectivo do nosso estudo foi apresentar elementos de apoio para os professores de matemática do ensino secundário, que pudessem ser úteis na preparação das aulas que incluem demonstrações. O Capítulo 4 foi construído à base de análises e comparações de demonstrações standard feitas nos livros escolares e demonstrações feitas no sistema de Dedução Natural explicitando ao máximo os argumentos. Relativamente a esse estudo concluímos que para algumas demonstrações a apresentação no sistema de Dedução Natural facilita a compreensão.

Para finalizar devo dizer que o desenvolvimento desta tese representa um marco significativo na minha trajectória académica. Tomei conhecimento de novas teorias e construí novas ideias que pretendo utilizar na minha actividade profissional. Este estudo levou-me a acreditar que para melhor compreender e ensinar demonstrações há que ter uma base sólida do conhecimento dos sistemas dedutivos formais. Também surgiram novos desafios, como por exemplo utilizar o sistema de Dedução Natural de uma forma explícita em alguns casos de demonstrações quando isso facilita a compreensão das mesmas.

Apesar de tudo o que dissemos sobre a escrita de provas não esquecemos que antes do tratamento formal deve desenvolver-se a capacidade de “ver”, de “penetrar” os conceitos e os problemas com conhecimento e intuição.

Índice Remissivo

Bibliografia

[1] J. Almeida and H. Ribeiro. *Introdução à lógica*. Departamento de Matemática Pura, Faculadade de Ciências, Universidade de Porto, 2002.

[2] J. Barwise. *Language proof and logic*. Seven Bridges Press, 1999-2000.

[3] R. Bianconi. Lógicas construtivas: Intuicionismo, uma introdução. *(disponível em http://www.ime.usp.br/˜bianconi/recursos/in.pdf)*.

[4] R. Bianconi. A linguagem matemática. Apontamentos do professor Ricardo Bianconi. *(disponível em http://www.ime.usp.br/˜bianconi/recursos/mat.pdf)*, 2002.

[5] S. Bilaniuk. *A problem course in mathematical logic, version 1.6*. Trent University, 1994-2003.

[6] R. Book. *Formal language theory*. New York: Academic Press, 1980.

[7] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A course in universal algebra*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 78. New York - Heidelberg Berlin: Springer-Verlag., 1981.

[8] S. N. Burris. *Logic for mathematics and computer science*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

[9] S. R. Buss. *Handbook of proof theory*. Elsevier Science B.V., 1998.

[10] J. G. Calado. *Compêndio de aritmética racional*. Livraria Cruz, Braga, 1967.

[11] W. Carnielli, M. Coniglio, and R. Bianconi. *Lógica e aplicações: Matemática, ciência da computação e filosofia*. Universidade Estadual de Campinas, Universidade de São Paulo, 2006.

[12] B. Chellas. *Elementary formal logic*. Calgary: Perry Lane Press, 1997.

[13] A. Church. *Introduction to mathematical logic*. Princeton Univ. Press, 1956.

[14] N. C. Da Costa and D. Krause. Lógica. *Notas de Aula, (disponível em http://filosofiaetc.sites.uol.com.br/Novo4.pdf)*, 2005.

[15] D. V. Dalen. *Logic and structure*. Springer, 1997.

[16] H. B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, 1970.

[17] J. Ferreira. *Introdução à análise matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian.

[18] I. Ferreirim. Notas sobre lógica de primeira ordem. *(disponível em http://ptmat.fc.ul.pt/ mimafer/ipo0506/ipochapter.pdf)*, 2006.

[19] J. H. Gallier. *Logic for computer science*. Foundations of automatic theorem proving, Wiley, 2003.

[20] G. Gentzen. Investigations in to logical deduction. *SZABO, M.E. The collected paper of Gerhard Gentzen*, 1969.

[21] J.-Y. Girard. *Proofs and types*. Cambridge University Press, 2003.

[22] P. Halmos. *Naive set theory*. Van Nostrand, 1960.

[23] B. Haskell. *Foundations of mathematical logic*. Dover Publications, Inc., 1977.

[24] E. Hernandez-Manfredini. *Fundamentos do Cálculo Proposicional*. Cadernos de Matemática, CM02/ D-07, Depart de Mat, Universidade de Aveiro .

[25] E. Hernandez-Manfredini. *Notas sobre cálculo de primeira ordem*. Notas manuscritas, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2006.

[26] E. Hernandez-Manfredini and M. A. Martins. *To prove a tautology*. International conference in mathematics, sciences and science education, Aveiro, 193-198, September 2006.

[27] E. Hernandez-Manfredini, M. A. Martins, and P. Cruz. *A teaching aid for building proofs in proposicional calculus*. Second international congress on tools for teaching logic, Salamanca, 51-56, September 2006.

[28] D. Hilbert and W. Ackermann. *Principles of mathematical logic*. American Mathematical Society, 2003.

[29] J. Kearns. *The principles of deductive logic*. Albany: SUNY Press, 1988.

[30] M. Kim. Proposicional calculus - natural deduction. *(disponível em http://pswlab.kaist.ac.kr/courses/cs402-07/prop-logic7.pdf)*, 2007.

[31] J. Kuper. Overview of proposition and predicate logic. *(disponível em http://wwwhome.cs.utwente.nl/ infrieks/MHMI/2005.jk.pdf)*, 2005.

[32] S. Kurt. *Proof theory.* Springer - Verlag, 1977.

[33] E. Lages Lima. *Análise Real.* IMPA, 2004.

[34] A. Machado. *Introdução à lógica matemática.* Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2002.
REANIMAT (A. Machado et al).

[35] G. Malinowski. *Many-valued logics.* Clarendon Press.Oxford, 1993.

[36] A. T. Martins, A. G. de Oliveira, and R. J. de Queiroz. Uma introdução à teoria da prova.

[37] M. T. Martins. *Textos de matemática-Tópicos fundamentais da matemática.* Série A, nº3, UC, 1999.

[38] N. Moreira. *Deduction systems and intuitionism.* MAP-i, Braga, 2007.

[39] S. Negri and J. Von Plato. *Structural proof theory.* Cambridge University Press, 2001.

[40] W. Newton-Smith. *Lógica: um curso introdutório.* Gradiva, 1998.

[41] F. J. Pelletier. *A history of natural deduction and elementary logic textbooks.*

[42] F. Pfenning. *Automated Theorem Proving.* Springer 2004.

[43] E. F. Rêgo. Intuicionismo e teoria de categorias/topos. *VII Colóquio Compostelano de Lógica y Filosofia Analítica, Santiago de Compostela*, 2007.

[44] C. Sernadas, A. Sernadas, and P. Mateus. *Elementos de lógica e computação.* Notas de Curso da Lógica no IST, 2003-2006.

[45] J. S. Silva. *Compêndio de matemática, curso complementar do ensino secundário.* GEP, Lisboa, 1975.

[46] R. Smullyan. *First-order logic*. Springer-Verlag, 1968.

[47] J. N. Souza. *Lógica para ciência da computação*. Campus, 2002.

[48] A. Tarski. *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*. Oxford Un. Press, 1966.

[49] P. Taylor. *Practical foundations of mathematics*. Cambridge University Press, 1999.

[50] A. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Amsterdam, North Holland, 1989.

[51] G. Valentin. Classical deductive systems. *University of Witwatersrand, (disponível em http://mail.maths.wits.ac.za/ goranko/ML/AxiomaticSystemsSld.pdf)*.

[52] J. D. Vieira. *Matemáticas gerais (Cursos de Agronomia e Silvicultura)*. Vol.I-Análise, AAMoç., 1968.

[53] M. Walicki. Introduction to logic. *(disponível em http://www.ii.uib.no/ michal-/und/i227/book/book.pdf)*, 2006.

[54] P. Wolfram. *Proof theory - An introduction*. Springer, 1989.